

**Instituto Superior Técnico**  
**Departamento de Engenharia de Materiais**

**Prova de Capacidade Científica**

**TRABALHO DE SÍNTESE**

**SOLUÇÕES ANALÍTICAS  
PARA A DETERMINAÇÃO  
DO CAMPO DE TEMPERATURA  
EM MATERIAIS IRRADIADOS POR LASER**

**por:**

**Augusto M. M. Moita de Deus**

**Assistente Estagiário (I.S.T.)**

**Lisboa, Agosto de 1993**

*Dedicado Àquele a Quem Devo o meu Nome*

*(Carta aos Efésios 3: 14, 15)*

## **Agradecimentos**

Cabe-me em justiça agradecer às seguintes pessoas pelo apoio demonstrado ao longo destes anos de trabalho no Departamento de Engenharia de Materiais do I.S.T.:

ao meu orientador, o Professor Rui Vilar, por proporcionar as condições materiais para a prossecução do meu trabalho científico, por todos os incentivos e conselhos dados e pelo facto de se manter no Laboratório de Processamento de Materiais por Laser do I.S.T., por si dirigido, uma área de investigação no domínio da Modelação;

à Professora Olinda Conde, do Departamento de Física da Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa, pelo constante apoio prestado desde o início da minha carreira, que se tem manifestado não só na esfera estritamente científica mas também a nível pessoal;

aos meus colegas do Laboratório de Processamento de Materiais por Laser do I.S.T., Eng<sup>o</sup>. Rogério Colaço, Eng<sup>a</sup>. Patrícia Carvalho, Eng<sup>a</sup>. Maria Amélia Almeida, Dr. Nuno Brás, Eng<sup>o</sup>. José Figueira, bem como ao Dr. António Jorge Silvestre, pelo apoio, companheirismo e pelo esforço em manter um bom relacionamento e ambiente de trabalho, o que não é demais realçar atendendo à carácter complementar do meu trabalho no seio do grupo;

aos meus colegas Assistentes e aos Professores do Departamento de Engenharia de Materiais do I.S.T., por terem proporcionado a fácil adaptação de um físico ao ambiente científico-pedagógico de uma Escola de Engenharia, bem como pelo agradável ambiente de trabalho.

Finalmente, quero agradecer à minha esposa Alexandra e à minha filha Filipa. Eu achava curioso o facto de muitos autores de trabalhos de índole científica mencionarem a família, agradecendo o apoio e compreensão prestados para a realização do mesmo, ao passo que não entendia a relevância de o fazerem. Agora entendo porque o fazem.

## Resumo

Os tratamentos de materiais por feixes de radiação laser têm vindo a assumir nos anos mais recentes uma importância crescente em Ciência e Engenharia de Materiais. Visto que num grande número de aplicações de interesse científico e tecnológico o feixe é usado principalmente como fonte de calor, torna-se necessário conhecer o campo de temperatura que resulta da interacção entre a radiação laser e o material. Isso pode ser feito através da resolução da equação de Fourier de condução de calor, pela introdução do termo fonte apropriado ou da imposição da condição fronteira adequada. É objectivo deste trabalho a descrição de soluções analíticas simples dessa equação. Em particular, desenvolve-se em detalhe: a) um modelo unidimensional que leva em conta a variação com a temperatura do coeficiente de absorção; b) um método analítico para estimar o volume de matéria fundida por unidade de tempo, com base num modelo de fonte linear móvel de comprimento finito; c) um método que relaciona os valores da potência a usar, com e sem pré-aquecimento, de modo a obter a mesma profundidade tratada, com base num modelo de fonte pontual móvel. Além disso, é apresentada também uma síntese de outros modelos, orientada segundo o objectivo de destacar como podem ser usados para traduzir processos reais.

## Índice

1. Introdução.....	1
2. Modelo unidimensional para o cálculo da temperatura de superfície de um material irradiado por laser, incluindo a variação do coeficiente de absorção com a temperatura.....	5
2.1 Considerações gerais.....	5
2.1.1 Formulação matemática.....	6
2.1.2 Fluxo constante.....	7
2.1.3 Fluxo variável.....	8
2.2 Desenvolvimento teórico.....	8
2.3 Cálculos.....	17
2.4 Conclusões.....	19
3. Estimativa do volume fundido por unidade de tempo usando uma fonte linear móvel de comprimento finito.....	21
3.1 Considerações gerais.....	21
3.1.1 Formulação matemática.....	21
3.1.2 Fonte pontual móvel.....	23
3.1.3 Fonte linear móvel de comprimento finito.....	24
3.2 Desenvolvimento teórico.....	28
3.3 Cálculos.....	34
3.4 Conclusões.....	45
4. Relação entre a temperatura de pré-aquecimento e a potência em tratamento de materiais por laser.....	46
4.1 Considerações gerais.....	46
4.2 Desenvolvimento teórico.....	47
4.3 Cálculos.....	56
4.4 Conclusões.....	58
5. Soluções da equação de Fourier em materiais irradiados por laser: síntese.....	59
5.1 Caso unidimensional, domínio semi-infinito, sem geração de calor.....	60
5.1.1 Solução geral.....	60
5.1.2 Fluxo constante.....	61
5.2 Caso unidimensional, domínio finito, sem geração de calor, fluxo constante numa face.....	62
5.2.1 Fluxo nulo na face oposta.....	63
5.2.2 Temperatura nula na face oposta.....	63
5.2.3 Radiação para um meio a temperatura nula na face oposta.....	64
5.3 Caso unidimensional, domínio semi-infinito, com geração de calor.....	65
5.3.1 Termo fonte constante.....	65
5.3.2 Termo fonte variável.....	66
5.4 Fontes instantâneas.....	67
5.4.1 Fonte pontual.....	68
5.4.2 Fonte plana.....	69
5.4.3 Fonte circular.....	69
5.4.4 Fonte gaussiana.....	70

5.5 Fontes contínuas .....	71
5.5.1 Fonte pontual.....	72
5.5.2 Fonte plana.....	73
5.5.3 Fonte circular .....	74
5.5.4 Fonte gaussiana .....	76
5.6 Fontes em domínios de espessura fina.....	78
5.6.1 Fonte pontual instantânea .....	79
5.6.2 Fonte gaussiana instantânea .....	80
5.6.3 Fonte gaussiana contínua .....	80
5.7 Fontes móveis.....	81
5.7.1 Fonte pontual (formulação de Rosenthal).....	81
5.7.2 Fonte pontual (formulação de Carslaw e Jaeger).....	83
5.7.3 Fonte pontual num domínio finito.....	85
5.7.4 Fonte pontual num domínio de espessura fina.....	86
5.7.5. Fonte gaussiana .....	88
6. Conclusões.....	91
Apêndice 1 .....	92
Apêndice 2.....	94
Nomenclatura.....	96
Propriedades do material.....	96
Propriedades do feixe laser .....	96
Propriedades da interacção.....	97
Outras grandezas.....	97
Bibliografia.....	101

## 1. Introdução

No decorrer das últimas duas décadas os feixes de radiação laser têm sido usados extensivamente em Ciência e Engenharia de Materiais. Assim, não é de espantar que o número de aplicações seja já muito vasto [1,2]. No caso presente estamos concretamente interessados nas aplicações de cariz metalúrgico, por exemplo: têmpera superficial, projecção assistida por laser (cladding), fusão com modificação de composição química (alloying), soldadura e remoção de material (ablação), onde se evidenciam os efeitos térmicos da radiação laser ao interagir com a matéria.

Em todos esses casos recorre-se a uma das propriedades dos feixes laser: a possibilidade de transportar energia de uma forma versátil -com o auxílio de sistemas ópticos adequados ao tipo de feixe usado- e de a depositar numa região limitada de um material. Isso permite o uso de densidades de energia muito elevadas, possibilitando a obtenção de ciclos térmicos de aquecimento e arrefecimento muito rápidos e conseqüentemente taxas de arrefecimento muito altas, em comparação com os processos metalúrgicos convencionais.

Visto que os feixes laser utilizados nas aplicações directamente relacionadas com o presente trabalho são absorvidos numa camada muito fina (da ordem das centenas de angstrom, para metais [3]) da região superficial do material (da ordem dos milímetros, tipicamente), tais efeitos térmicos far-se-ão sentir principalmente na zona superficial, cujas propriedades podem, assim, ser alteradas sem modificar o comportamento do seu interior. Além disso, tais ciclos podem ser conseguidos em regiões pré-determinadas da superfície dum material, visto que em geral o feixe laser é móvel em relação à superfície a tratar.

Durante os ciclos térmicos acima mencionados podem ocorrer:

- a) transformações de fase no estado sólido (com ou sem difusão), e/ou:
- b) fusão e solidificação, e/ou:

c) vaporização e/ou sublimação de material.

Assim, é necessário definir *a priori* que transformações de fase se deverão operar durante o ciclo térmico para obter a aplicação requerida, seja ela por exemplo a têmpera superficial (caso a), a soldadura (caso b) ou a remoção de material (caso c).

Sendo assim, torna-se importante estudar a influência das diversas variáveis no campo de temperatura gerado no material. Podemos dividir tais variáveis em três grupos:

1º) Propriedades do material;

2º) Propriedades do feixe laser;

3º) Propriedades da interacção laser-matéria.

Concordemente, a lista dos símbolos usados para as grandezas físicas mencionadas no presente trabalho é apresentada em Apêndice segundo tal classificação.

Não nos iremos deter nos problemas associados à emissão e transporte da radiação laser. Além disso, também não entraremos em detalhes acerca dos processos físicos associados à própria interacção entre a radiação e a matéria, de que resulta a conversão (ou degradação) da energia electromagnética em energia térmica. Recorremos à Óptica Ondulatória para obter os valores das grandezas físicas que traduzem tal interacção, o que nos permite conhecer a fracção de energia efectivamente depositada no material (o que é traduzido pelo coeficiente de absorção,  $A$ ) e também de como essa energia é depositada (o que é traduzido pelo coeficiente de absorção linear,  $\beta$ ).

Ao dispor dos valores de  $A$  e  $\beta$ , os efeitos térmicos da radiação laser podem ser naturalmente inseridos na equação de condução de calor, dita equação de Fourier. Isso é feito usualmente de duas maneiras:

1ª) ou se considera na dita equação um termo fonte (neste caso a taxa de produção de energia por unidade de volume) em cada ponto do material,

2ª) ou se prescreve o fluxo da energia na superfície (i.e., a quantidade de energia que é depositada, por unidade de área e por unidade de tempo) em cada ponto da fronteira do material.

É objectivo do presente trabalho obter soluções analíticas da equação de Fourier nas condições de irradiação de um sólido por um laser, que é um problema matemático que, consoante a situação real a que nos queiramos reportar, pode ser posto de diversas formas:

- a) regime estacionário ou não estacionário;
- b) 1, 2 ou 3 dimensões espaciais;
- c) geometria finita ou infinita;
- d) propriedades termofísicas e/ou ópticas constantes ou dependentes da temperatura;
- e) feixe laser móvel ou imóvel,
- f) deposição de energia por unidade de volume, no interior, ou por unidade de área à superfície do material.

Visto ser possível fornecer um grande número de soluções da equação de Fourier no contexto da interacção laser-matéria, será conveniente ter sempre presente uma classificação das mesmas. Isso pode ser feito usando os factores acima alistados.

No entanto, não se pretende desenvolver um trabalho de índole puramente matemática, pois estamos prioritariamente interessados no significado físico das expressões. Em particular, pretende-se:

- a) explicitar as condições físicas em que determinada forma da equação de Fourier é válida,
- b) detalhar o método de obtenção de algumas soluções e
- c) realizar cálculos concretos, de modo a evidenciar o tipo de informação que se pode obter com tais modelos.

A necessidade de procurar a forma da equação de Fourier mais adequada ao problema concreto que se pretende resolver, reside no facto de não existir uma solução analítica geral para a equação de condução do calor com termo fonte associado ao feixe laser, não estacionária, em três dimensões, com propriedades dependentes da temperatura, para qualquer tipo de condições iniciais e condições fronteira e para qualquer tipo de geometria do material a ser irradiado. Sendo assim, ter-se-ão de realizar

necessariamente determinadas aproximações, o que deve ser guiado por um conhecimento claro da realidade física do problema em estudo.

A resolução de tal equação pode ser feita não somente por via analítica, mas também por via numérica. Uma das vantagens da abordagem analítica relativamente à numérica é a maior facilidade em estabelecer a conexão entre as soluções obtidas e a realidade física. Com efeito, o facto de nas soluções analíticas figurarem explicitamente as variáveis que intervêm nos processos facilita muito a análise do efeito de cada um desses parâmetros no ciclo térmico, o que pode servir como guia para a optimização de processos reais. Contudo, não se deve esquecer que os modelos numéricos permitem, em princípio, uma melhor aproximação à realidade, porque é no seu âmbito que se consegue resolver a equação de Fourier sem introduzir as aproximações usuais aos métodos analíticos. De facto, existem problemas para os quais a resolução analítica seria mais difícil, computacionalmente mais lenta ou até desconhecida. Sendo assim, o facto dos métodos numéricos não serem aqui tratados não significa a minimização da sua importância, visto considerarmos ser a adopção de tais técnicas a sequência natural da presente abordagem, que é exclusivamente analítica.

As soluções apresentadas no presente trabalho reflectem pesquisa em fontes bibliográficas bem como actividade de investigação realizada com base em tais fontes. Este esforço traduz-se quer por desenvolvimentos pontuais de alguns dos resultados encontrados na bibliografia, quer pela apresentação de novos resultados. Em primeiro lugar apresentamos com algum detalhe tais desenvolvimentos realizados no âmbito de actividades de investigação, o que é acompanhado por uma descrição detalhada da respectiva fundamentação matemática (cap. 2, 3 e 4). Em seguida, é feita uma síntese dos modelos matemáticos descritos de forma tão elegante por H. S. Carslaw e J. C. Jaeger em "Conduction of Heat in Solids" [4], síntese essa que foi orientada segundo o objectivo de seleccionar os mais simples dentre aqueles que podem ser usados para traduzir os efeitos térmicos da interacção laser-matéria.

Sendo assim, será também um desenvolvimento natural do presente trabalho a produção dum texto dessa índole, complementado pela inclusão de outros modelos, em particular os que têm surgido na literatura científica mais recente.

## **2. Modelo unidimensional para o cálculo da temperatura de superfície de um material irradiado por laser, incluindo a variação do coeficiente de absorção com a temperatura**

### **2.1 Considerações gerais**

Em algumas aplicações dos feixes de radiação laser recorre-se aos chamados modelos unidimensionais, nos quais o campo de temperatura é função apenas de uma coordenada do espaço. É o caso concreto do uso de feixes laser pulsados, nos quais uma certa quantidade de energia é libertada num intervalo de tempo muito curto, obtendo-se valores de potência bastante elevados. Assim, para feixes laser de raio suficientemente grande e durante o intervalo de tempo de irradiação, podem-se em geral desprezar as componentes do fluxo de calor paralelas à superfície, visto que durante esse tempo a componente dominante do gradiente de temperatura será a da direcção perpendicular à superfície do material.

Iremos agora considerar este tipo de modelos, tendo por objectivo o estabelecimento duma expressão que permita estimar analiticamente a temperatura da superfície dum material irradiado por laser, levando em conta que o coeficiente de absorção não é uma constante, mas que depende ele próprio da temperatura. Ao fazer isso, queremos desde já sublinhar que se está a colocar um problema de retroacção: a variável que controla a quantidade de energia que é absorvida pelo material, que é o que determina o campo de temperatura, é ao mesmo tempo controlada pelo valor deste campo na superfície.

Vamos em seguida descrever detalhadamente como se pode obter tal expressão, começando por apresentar o modo como o problema é formulado matematicamente.

### 2.1.1 Formulação matemática

Começemos por considerar a equação da condução do calor a uma dimensão, não estacionária, num sólido semi-infinito no interior do qual não existe geração de calor [5]:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = D \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad (1.)$$

$$x \geq 0 \quad (2.)$$

sendo:

$$D = \frac{K}{\rho c_p} \quad (3.)$$

em que  $T$  é a temperatura,  $t$  é o tempo,  $x$  é a distância à superfície do material,  $D$  é a difusividade térmica,  $K$  é a condutividade térmica,  $\rho$  é a massa específica e  $c_p$  é o calor específico a pressão constante.

Vão ser impostas as seguintes condições:

Temperatura inicial nula:

$$T(x, t = 0) = 0 \quad (4.)$$

Temperatura nula no infinito:

$$T(x = \infty, t) = 0 \quad (5.)$$

Fluxo de calor na superfície,  $f$ :

$$f = -K \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=0} = f(t) \quad (6.)$$

o que, aliado ao facto de ser nulo o termo fonte da equação de calor, equivale a considerar que se está a depositar energia somente no plano  $x = 0$ . Em particular, do ponto de vista da interacção laser-matéria, isso corresponde a tomar como completamente absorvida no plano  $x = 0$  a parcela da radiação não reflectida pela superfície. Tal hipótese é válida desde que o coeficiente de absorção linear seja elevado, o que acontece na

generalidade dos materiais tratados por laser. Assim, desprezando as perdas de energia na superfície,  $f$  é a densidade de potência absorvida pelo material\*:

$$f = A I \quad (7.)$$

em que  $I$  é a densidade de potência associada ao feixe laser e  $A$  é o coeficiente de absorção associado ao material e ao comprimento de onda da radiação incidente.

### 2.1.2 Fluxo constante

Para o caso em que  $f = f_0$  (constante), Carslaw e Jaeger obtiveram:

$$T(x, t) = \frac{2f_0}{K} \sqrt{Dt} \operatorname{ierfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{Dt}}\right) \quad (8.)$$

em que a função  $\operatorname{ierfc}$  é definida por:

$$\operatorname{ierfc}(u) = \int_u^{\infty} \operatorname{erfc}(\xi) d\xi \quad (9.)$$

em que:

$$\operatorname{erfc}(\xi) = 1 - \operatorname{erf}(\xi) \quad (10.)$$

sendo  $\operatorname{erf}$  a função de erro. Em particular, obtiveram uma temperatura à superfície proporcional a  $t^{1/2}$ :

$$T(x = 0, t) \equiv T_0(t) = \frac{2f_0}{K} \sqrt{\frac{Dt}{\pi}} \quad (11.)$$

---

\* Estamos a considerar que não há transmissão de radiação através do material e daí para o exterior por uma eventual superfície oposta, logo:  $A = 1 - R$ , em que  $R$  é a reflectividade.

### 2.1.3 Fluxo variável

Para o caso geral de um fluxo variável  $f(t)$ , Carslaw e Jaeger obtiveram [6]:

$$T(x,t) = \frac{1}{K} \sqrt{\frac{D}{\pi}} \int_0^t \frac{f(t-\tau)}{\sqrt{\tau}} e^{-\frac{x^2}{4D\tau}} d\tau \quad (12.),$$

logo a temperatura à superfície é dada por:

$$T_o(t) = \frac{1}{K} \sqrt{\frac{D}{\pi}} \int_0^t \frac{f(t-\tau)}{\sqrt{\tau}} d\tau \quad (13.)$$

### 2.2 Desenvolvimento teórico

Vamos considerar em detalhe [7] o caso em que o fluxo depende da temperatura na superfície, tendo em vista que em geral o coeficiente de absorção depende da temperatura:

$$f = A [T(x=0)] \quad I = f(T_o) \quad (14.)$$

O problema da determinação da temperatura superficial  $T_o$  conduz à resolução de uma equação integral, que pode ser escrita de diversas formas:

$$T_o(t) = \frac{E}{2} \int_0^t \frac{A[T_o(t-\tau)]}{\sqrt{\tau}} d\tau \quad (15.)$$

$$= \frac{E}{2} \int_0^t \frac{A[T_o(s)]}{\sqrt{t-s}} ds \quad (16.)$$

$$= E \int_0^{\sqrt{t}} A[T_o(t-\xi^2)] d\xi \quad (17.)$$

$$= \frac{E\sqrt{t}}{2} \int_0^1 \frac{A[T_o(t-\theta t)]}{\sqrt{\theta}} d\theta \quad (18.)$$

em que:

$$E \equiv \frac{2I}{K} \sqrt{\frac{D}{\pi}} \quad (19.)$$

Podemos obter uma expressão para a função  $A(T_0)$  através da equação de Bramson [8], que permite obter o coeficiente de absorção em função do comprimento de onda da radiação,  $\lambda$  e da resistividade eléctrica do material,  $\rho_e$ , a qual depende da temperatura:

$$A = 0.365 \sqrt{\frac{\rho_e}{\lambda}} - 0.0667 \frac{\rho_e}{\lambda} + 0.006 \left( \frac{\rho_e}{\lambda} \right)^{3/2} \quad (20.)$$

em que os coeficientes numéricos, calculados por Bramson, têm as respectivas unidades do Sistema Internacional, de maneira a tornar cada parcela adimensional. Admitindo uma variação linear da resistividade eléctrica com a temperatura e tomando apenas o primeiro termo da equação de Bramson, obtemos\* para  $A(T_0)$ :

$$A(T_0) = \alpha \sqrt{T_0 + \chi} \quad (21.)$$

sendo  $\alpha$  e  $\chi$  constantes.

---

\* Com efeito, se tomarmos a resistividade eléctrica na seguinte forma usual:

$$\rho_e = P(1 + Q(T + T_{in}))$$

em que  $T + T_{in}$  é a temperatura em graus Celsius, sendo  $T_{in}$  a temperatura inicial na mesma escala, obtemos:

$$\begin{cases} \alpha = 0.365 \sqrt{\frac{PQ}{\lambda}} \\ \chi = T_{in} + \frac{1}{Q} \end{cases}$$

A equação integral que conduz à determinação da temperatura da superfície pode agora ser rescrita da seguinte forma:

$$T_o(t) = \frac{\alpha E}{2} \int_0^t \sqrt{\frac{T_o(s) + \chi}{t-s}} ds \quad (22.)$$

que é uma equação integral de Abel, cuja forma geral é dada por Linz [9]:

$$g(t) = \int_0^t \frac{h(s)}{\sqrt{t-s}} ds \quad (23.)$$

em que, no caso presente, temos:

$$g(t) = T_o(t) \quad (24.)$$

$$h(t) = \frac{\alpha E}{2} \sqrt{T_o(t) + \chi} \quad (25.)$$

Usualmente  $g(t)$  é conhecido e para esse caso Linz fornece uma fórmula explícita para  $h(t)$ :

$$h(t) = \frac{g(0)\sqrt{t}}{\pi} + \frac{1}{\pi} \int_0^t \frac{g'(s)}{\sqrt{t-s}} ds \quad (t \neq 0) \quad (26.)$$

No entanto, a aplicação de tal fórmula de inversão não resolve o presente problema. Sendo assim, iremos começar por considerar o caso particular em que a constante  $\chi$  é nula, como um primeiro passo na tentativa de resolução geral do problema. Assim, a equação integral pode ser rescrita nas seguintes formas:

$$T_o(t) = \frac{\alpha E}{2} \int_0^t \sqrt{\frac{T_o(s)}{t-s}} ds \quad (27.)$$

$$= \frac{\alpha E \sqrt{t}}{2} \int_0^1 \sqrt{\frac{T_o(t(1-\theta))}{\theta}} d\theta \quad (28.)$$

A forma do argumento de  $T_o$  sugere que se use uma função do tipo monómio:

$$T_o(t) = \mu t^q \quad (29.)$$

(em que  $\mu$  e  $q$  são constantes), visto que isso permite que a função a integrar seja independente de  $t$ .

Podemos escrever então:

$$T_o(t) = \mu t^q = \frac{\alpha E \sqrt{\mu}}{2} t^{\frac{1+q}{2}} \int_0^1 \sqrt{\frac{(1-\theta)^q}{\theta}} d\theta \quad (30.)$$

Logo:

$$q = 1 \quad (31.)$$

e visto que:

$$\int_0^1 \sqrt{\frac{1-\theta}{\theta}} d\theta = \frac{\pi}{2} \quad (32.)$$

obtemos finalmente a solução:

$$T_o(t) = \mu t \quad (33.)$$

$$\mu \equiv \left( \frac{\pi \alpha E}{4} \right)^2 \quad (34.)$$

ou seja, a variação da temperatura superficial com o tempo é linear, o que é diferente da já referida variação com  $t^{1/2}$  (equação (11.)) para o caso em que  $A$  é uma constante.

Podemos verificar isso, rescrevendo essa expressão usando a constante  $E$  que atrás definimos:

$$T_o(t) = A E \sqrt{t} \quad (35.)$$

No entanto, não é fisicamente realista que numa escala de temperaturas em que a temperatura inicial seja nula aconteça que a constante  $\chi$  seja nula também. Isso só aconteceria se a irradiação por laser se fizesse a partir de uma temperatura tal que a resistividade eléctrica fosse próxima de zero, o que usualmente só acontece próximo do zero absoluto\* .

Assim, queremos retomar o nosso objectivo inicial, i.e., encontrar a solução para a situação mais geral ( $\chi \neq 0$ ). Para tal, consideremos de novo a equação integral de Abel que queremos resolver:

$$T_o(t) = \frac{\alpha E}{2} \int_0^t \sqrt{\frac{T_o(s) + \chi}{t-s}} ds \quad (22.)$$

Fazendo a seguinte mudança de variável:

$$T^+(t) = T_o(t) + \chi \quad (36.)$$

e tomando a seguinte forma para  $T^+$ :

$$T^+(t) = \mu(t+t^*) \quad (37.)$$

de maneira a generalizar o caso anterior, em que  $\chi = 0$ , sendo  $t^*$  um tempo característico dado, obviamente, por:

---

\* Ao criticar esta solução, poderia ser ainda invocada outra razão, de índole diferente:

$$\text{se: } T_o(t=0), \text{ então: } A(t=0) = \alpha \sqrt{T_o(t=0)} = 0$$

logo o fluxo de calor fornecido à superfície no instante inicial seria zero e a temperatura superficial não se alteraria ao longo do tempo. No entanto, esta última dificuldade pode ser ultrapassada desde que admitamos que a temperatura superficial inicial não é rigorosamente nula, mas sim um infinitésimo acima de zero.

$$t^* = \frac{\chi}{\mu} \quad (38.)$$

obtemos:

$$T_o(t) = T^+(t) - \chi = \mu t \quad (39.)$$

para o primeiro membro da equação. Para o segundo membro:

$$T_o(t) = \frac{\alpha E}{2} \sqrt{\mu} \int_0^t \sqrt{\frac{s+t^*}{t-s}} ds \quad (40.)$$

ou seja:

$$T_o(t) = \frac{2}{\pi} \mu t \left[ \sqrt{\frac{t^*}{t}} + \left(1 + \frac{t^*}{t}\right) \operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{t}{t^*}}\right) \right] \quad (41.)$$

o que mostra que admitir uma variação linear para a temperatura superficial não conduz à solução rigorosa do problema. Entretanto, podemos estudar o comportamento assintótico desta última expressão.

Para  $t \ll t^*$ :

$$\begin{aligned} T_o(t) &= \frac{\alpha E}{2} \sqrt{\mu} t \left[ \sqrt{\frac{t^*}{t}} + \left(0 + \frac{t^*}{t}\right) \left(\sqrt{\frac{t}{t^*}}\right) \right] \\ &= \alpha E \sqrt{\mu t^*} t = \alpha \sqrt{\chi} E \sqrt{t} = A E \sqrt{t} \end{aligned} \quad (42.)$$

(sendo  $A$  calculado para a temperatura inicial, que é nula), em acordo notável com a equação (35.), referente ao caso em que o fluxo à superfície é constante.

Para  $t \gg t^*$ :

$$T_o(t) = \frac{2}{\pi} \mu t \left[ 0 + (1+0) \frac{\pi}{2} \right]$$

$$= \mu t \quad (43.)$$

ou seja, neste limite a formulação é consistente. Sendo assim, fica justificado (embora de forma não rigorosa) que tomemos igualmente:

$$T_o(t) = \mu t \quad (33.)$$

como solução aproximada para o problema considerado\*.

Isso pode ser verificado, de forma qualitativa, se compararmos as expressões em causa:

---

\* Se admitirmos que é uma boa aproximação tomar o fluxo à superfície (que certamente não é constante no tempo) como proporcional a  $\sqrt{t + c^{te}}$ , podemos obter uma solução rigorosa que evita a resolução da equação integral de Abel. Com efeito, se for:

$$-K \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=0} = f(t) = M \sqrt{t+u}$$

a temperatura à superfície é dada por:

$$T_o(t) = \frac{M}{K} \sqrt{\frac{D}{\pi}} \int_0^t \frac{\sqrt{s+u}}{\sqrt{t-s}} ds = \frac{M}{K} \sqrt{\frac{D}{\pi}} t \left[ \sqrt{\frac{u}{t}} + \left(1 + \frac{u}{t}\right) \operatorname{arctg} \left( \sqrt{\frac{t}{u}} \right) \right]$$

que se reduz à expressão já apresentada desde que façamos  $u = t^*$  e:

$$M = \frac{2K\mu}{\sqrt{\pi D}}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} T_o^1 = A E \sqrt{t} = \alpha \sqrt{\chi} E \sqrt{t} = \frac{4}{\pi} \mu \sqrt{t^* t} \quad (\text{fluxo constante}). \\ T_o^2 = \mu t \quad (\text{solução aproximada}). \\ T_o^3 = \frac{2}{\pi} \mu t \left[ \sqrt{\frac{t^*}{t}} + \left( 1 + \frac{t^*}{t} \right) \text{arctg} \left( \sqrt{\frac{t}{t^*}} \right) \right] \quad (\text{resultado da integração}). \end{array} \right. \quad (44.a-c)$$

Tomando:

$$\tau \equiv \frac{t}{t^*} \quad (45.)$$

$$\varphi_o^i \equiv \frac{T_o^i}{\mu t^*}, \quad i = 1, 2, 3 \quad (46.)$$

obtém-se:

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi_o^1 = \frac{4}{\pi} \sqrt{\tau} \\ \varphi_o^2 = \tau \\ \varphi_o^3 = \frac{2}{\pi} \tau \left[ \sqrt{\frac{1}{\tau}} + \left( 1 + \frac{1}{\tau} \right) \text{arctg} \left( \sqrt{\tau} \right) \right] \end{array} \right. \quad (47.a-c)$$

Essas funções estão representadas graficamente na figura 2.1, onde se pode confirmar que  $\varphi_o^2$  e  $\varphi_o^3$  têm um comportamento análogo que é ao mesmo tempo bem diferente do da função  $\varphi_o^1$ , o que permite justificar, embora de forma não rigorosa, a adoção da solução (33.).

# Temperatura normalizada vs. tempo normalizado

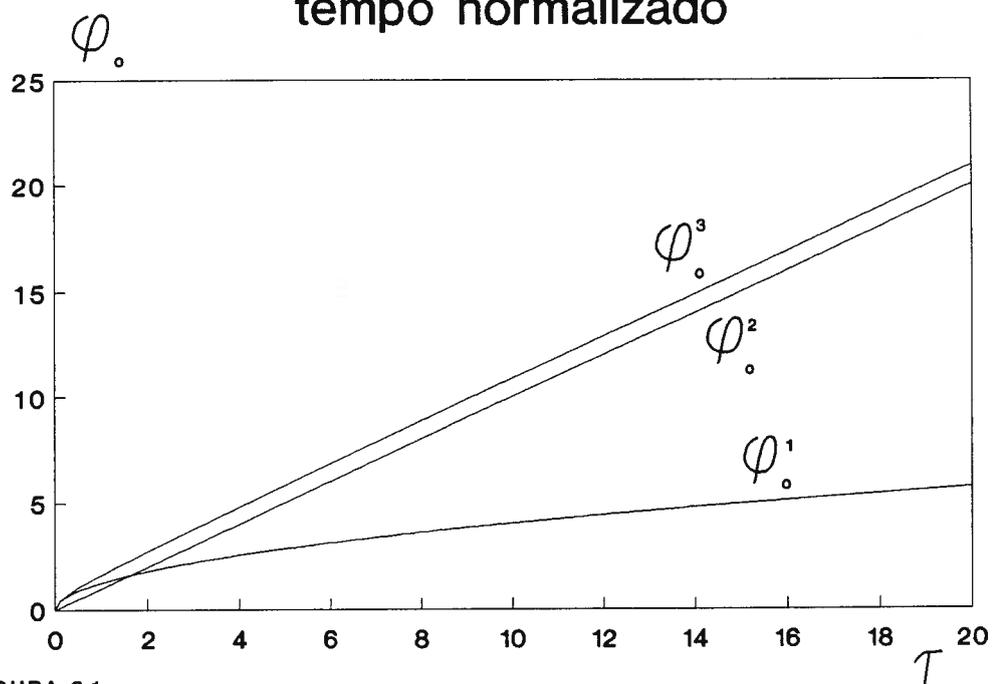


FIGURA 2.1

Tomando assim essa expressão para a temperatura de superfície, podemos escrever para o campo de temperatura num dado instante  $t$ :

$$T(x,t) = \frac{2}{\pi} \mu \int_0^t \sqrt{\frac{s+t}{t-s}} e^{-\frac{x^2}{4D(t-s)}} ds \quad (48.)$$

Na busca da solução exacta do problema acima descrito poderia ter sido usada uma formulação ligeiramente diferente, que por fim resulta numa equação de Abel escrita numa forma adequada para realizar a sua integração numérica, que se pretende vir a ser um desenvolvimento futuro do presente trabalho. Isso é apresentado no Apêndice 1.

Além disso, podemos generalizar o caso em que a condição fronteira é:

$$f(T_o(t)) = \alpha \sqrt{T_o} \quad I \quad (49.)$$

(com  $\chi = 0$ , cf. equação (21.)), para:

$$f(T_o(t)) = \varepsilon (T_o)^p \quad (50.)$$

Isso é apresentado no Apêndice 2.

### 2.3 Cálculos

Os modelos unidimensionais são usados frequentemente para estimar a duração mínima que um impulso laser com uma dada densidade de potência deve ter, de modo a produzir fusão na superfície do material que está a ser irradiado (ou vice-versa, i.e., qual a densidade de potência mínima a usar para produzir fusão na superfície dum material irradiado com um impulso laser de duração conhecida). É isso que passamos agora a descrever, usando quer a expressão para coeficiente de absorção constante (equação (35.)) quer a expressão que obtivemos na secção anterior (equação (33.)).

Consideremos os dados físicos do alumínio, do cobre e do ferro, a 300 K:

	Al	Cu	Fe
$K / W m^{-1} K^{-1}$ [10]	237	401	80.2
$D / m^2 s^{-1}$ [10]	$9.71 \times 10^{-5}$	$1.17 \times 10^{-4}$	$2.31 \times 10^{-5}$
$P / \Omega m$ [11]	$2.7 \times 10^{-8}$	$1.6 \times 10^{-8}$	$9 \times 10^{-8}$
$Q / ^\circ C^{-1}$ [11]	$3.9 \times 10^{-3}$	$3.9 \times 10^{-3}$	$4.5 \times 10^{-3}$
$T_{fus} / ^\circ C$ [10]	660	1085	1537
$A(T_{in})$	1.91 %	1.47 %	3.48 %
$A(T_{fus})$	3.42 %	3.19 %	9.03 %

em que  $P$  e  $Q$  são os coeficientes da expressão que permite calcular a resistividade eléctrica em função da temperatura (em graus Celsius):

$$\rho_e = P (1 + Q(T + T_{in})) \quad (51.),$$

$T_{fus}$  é a temperatura de fusão e  $T_{in}$  é a temperatura inicial (em graus Celsius). Quanto ao coeficiente de absorção  $A$ , os valores que constam na tabela foram calculados através da equação de Bramson (equação (20.)).

Realizaram-se cálculos para a determinação da mínima duração de impulso,  $t_i$ , para produzir fusão na superfície do material, tomando uma densidade de potência usual para feixes laser pulsados ( $I = 1.0 \times 10^{12} W / m^2$ ), o comprimento de onda dos feixes laser de CO<sub>2</sub> ( $\lambda = 10.6 \mu m$ ). Obtiveram-se assim os seguintes resultados (para  $T_{in} = 25 ^\circ C$ ):

$t_i / \mu s$	Al	Cu	Fe
eq.(35.), com $A(T_{in})$	0.50	5.6	0.412
eq.(35.), com $A(T_{fus})$	0.16	1.19	0.061
equação (33.)	0.35	2.37	0.105

Notamos que os resultados para o cobre são superiores aos do alumínio e do ferro, o que se explica facilmente devido ao cobre possuir maior condutividade e difusividade térmicas bem como menor coeficiente de absorção. Contudo, mais relevante para a presente análise é notar que os valores encontrados com a equação (33.) são enquadrados pelos resultados obtidos com a equação (35.) (o que seria de esperar), mas que diferem sempre de tais de forma significativa. Assim, a equação (33.) permite obter uma estimativa da duração do impulso que leva em conta o facto do coeficiente de absorção variar durante o próprio impulso. Tal estimativa em geral é bem diferente da que se obtém usualmente, que é tomar  $A$  como uma constante, seja referente à temperatura ambiente ou à temperatura de fusão.

## 2.4 Conclusões

1. Desenvolvemos um modelo analítico unidimensional aproximado que permite calcular a temperatura de superfície de um material irradiado por laser entrando com o efeito da variação do coeficiente de absorção com a temperatura. De notar que em geral os modelos analíticos tomam tal coeficiente como uma constante.

2. Isso foi feito desenvolvendo a expressão geral para o campo de temperatura para um fluxo variável, reconhecendo que neste caso o fluxo é proporcional ao coeficiente de absorção, que por sua vez depende da temperatura da superfície, que é função somente do tempo.

3. Usámos a equação de Bramson para exprimir a variação do coeficiente de absorção com a temperatura de superfície, tomando apenas o primeiro termo e supondo uma variação linear da resistividade eléctrica com a temperatura.

4. Verificámos que o problema da determinação da temperatura da superfície se resumia à resolução de uma equação integral de Abel.

5. Tal equação foi integrada exactamente para o caso em que o zero da temperatura coincide com a temperatura para a qual a resistividade eléctrica é nula.

6. Para o caso mais geral, obtivemos uma solução aproximada cujo comportamento assintótico é consistente com os pressupostos do modelo.

7. Tal expressão é a solução rigorosa do problema similar em que se prescreve o fluxo levando em conta o comportamento esperado para a variação do coeficiente de absorção com o tempo, evitando assim os problemas associados à resolução duma equação integral.

8. Tais expressões para a temperatura de superfície são muito úteis nas aplicações visto que permitem saber, por exemplo, qual a duração mínima de um impulso laser de uma certa densidade de potência para obter fusão na superfície de um material ou vice-versa.

9. Além disso, esta abordagem permite realçar o facto de, em geral, os fenómenos associados à interacção laser-matéria serem essencialmente não-lineares.

10. Quanto a desenvolvimentos futuros, espera-se integrar numericamente a equação de Abel e comparar tais resultados com a solução aproximada que propomos no presente trabalho. Espera-se ainda aprofundar do ponto de vista analítico a abordagem deste problema.

### 3. Estimativa do volume fundido por unidade de tempo usando uma fonte linear móvel de comprimento finito

#### 3.1 Considerações gerais

Na maioria das aplicações, os tratamentos por laser são realizados com feixes que se movem em relação ao material. No entanto, o problema da resolução da equação de Fourier com uma fonte de calor móvel genérica não é simples. Consequentemente, a estratégia adequada é a de operar determinadas aproximações que simplifiquem tal equação. Assim, um dos objectivos do presente capítulo é introduzir expressões aproximadas do campo de temperatura que se desenvolve num material irradiado por um feixe laser móvel. A partir daí é possível estimar, por exemplo, o volume de fase sólida que funde por unidade de tempo, que é habitualmente um dos parâmetros que se pretende controlar. É também objectivo deste capítulo obter um método analítico para a estimativa dessa grandeza.

##### 3.1.1 Formulação matemática

Seja a superfície do material a tratar o plano XOY dum sistema de eixos ortogonal, sendo OZ paralelo ao eixo de revolução do feixe laser (ver figura 3.1). Vamos considerar um feixe móvel, com densidade de potência  $I(x,y)$  e com velocidade  $v$  segundo o eixo dos XX. Considerando, por exemplo, um feixe circular (espacialmente) uniforme\* de raio  $r_0$ , o perfil de densidade de potência à superfície é (num sistema de eixos solidário com o feixe):

$$I(x,y) = \begin{cases} I & \text{para } \sqrt{x^2 + y^2} < r_0 \\ 0 & \text{para } \sqrt{x^2 + y^2} > r_0 \end{cases} \quad (52.)$$

---

\* Pode falar-se também de feixes laser temporalmente uniformes, para os quais a densidade de potência é uma constante ao longo do tempo em cada ponto do espaço, apesar de poder variar de ponto para ponto. Normalmente o contexto esclarece se o autor fala de uniformidade espacial ou temporal.

em que  $I$  é constante. Quanto à potência total  $P$  emitida pela fonte laser, ela é dada simplesmente por\* :

$$P = \pi r_o^2 I \quad (53.)$$

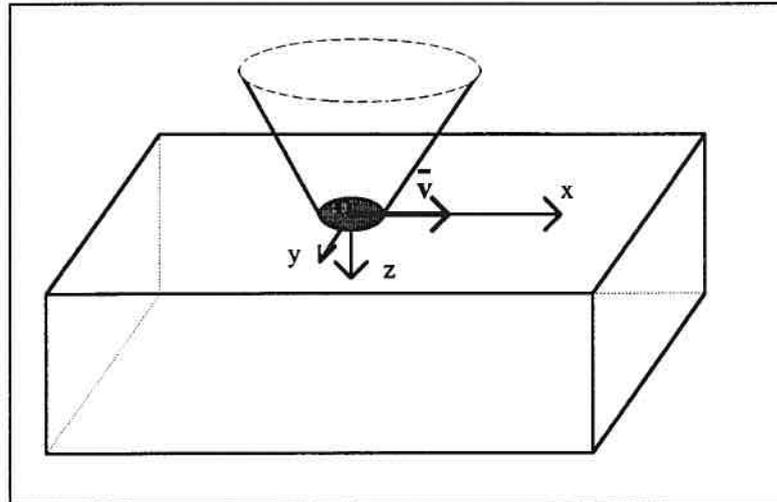


Figura 3.1

Considere-se a resolução da equação de Fourier:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = D \nabla^2 T + \frac{F}{\rho c_p} \quad (54.)$$

numa geometria semi-infinita, i.e.:

$$z \geq 0 \quad (55.)$$

com uma condição fronteira de fluxo nulo à superfície:

---

\* É interessante notar que para um feixe gaussiano de raio a  $1/e$  igual a  $r_o$  se obtém uma relação similar entre a potência e a densidade de potência. Por definição:

$$I(x, y) = I_{max} e^{-\frac{x^2 + y^2}{r_o^2}}$$

em que  $I_{max}$  é o valor da densidade de potência no eixo de revolução do feixe. A potência total  $P$  obtém-se por integração da expressão anterior, obtendo-se identicamente:

$$P = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} I(x, y) dx dy = \pi r_o^2 I_{max}$$

$$f = -K \left. \frac{\partial T}{\partial z} \right|_{z=0} = 0 \quad (56.)$$

em que no termo fonte genérico  $F$  se entra em linha de conta com a distribuição espacial da densidade de potência bem como com o modo em que a energia é absorvida no material.

### 3.1.2 Fonte pontual móvel

Comecemos por considerar o modelo mais simples, que é a fonte pontual móvel [12, 13, 14], que corresponde ao caso em que  $F$  é nulo em todo o espaço excepto num ponto, onde assume um valor infinito, ao passo que a energia depositada é finita. Visto que  $F$  dependerá em geral do raio do feixe laser, pode-se em alternativa tomar numa dada solução o limite quando o raio de feixe laser tende para zero (cf. ref.[12] e [14]). Outra possibilidade consiste em considerar  $F$  como nulo e tomar uma condição fronteira de fluxo imposto nulo em toda a superfície, excepto num ponto (cf. ref. [13]).

Se num ponto móvel com velocidade  $v$  se libertar sob a forma de calor uma potência total  $A P$ , sendo  $A$  o coeficiente de absorção, o campo de temperaturas será, num sistema de eixos solidário com o feixe e após se atingir um estado estacionário:

$$T(x, y, z) = T_{in} + \frac{A P}{2 \pi K r} e^{-\frac{v}{2D}(x+r)} \quad (57.)$$

em que  $T_{in}$  é a temperatura inicial e  $r$  é a distância à origem do sistema de coordenadas:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad (58.)$$

### 3.1.3 Fonte linear móvel de comprimento finito

Outro modelo simples é a fonte linear móvel de comprimento finito. Iremos descrever com algum pormenor o modelo apresentado para este caso por Ashby e Easterling [15]. Neste caso a potência absorvida pelo material,  $A P$ , está distribuída uniformemente num segmento de recta orientado segundo o eixo dos  $YY$ , cujo comprimento é tomado como sendo igual ao diâmetro do feixe,  $2 r_0$  (ver figura 3.2) . Tal modelo conduzirá a resultados tão mais próximos do caso em que a irradiação é feita com um feixe real quanto maior for a velocidade  $v$ .

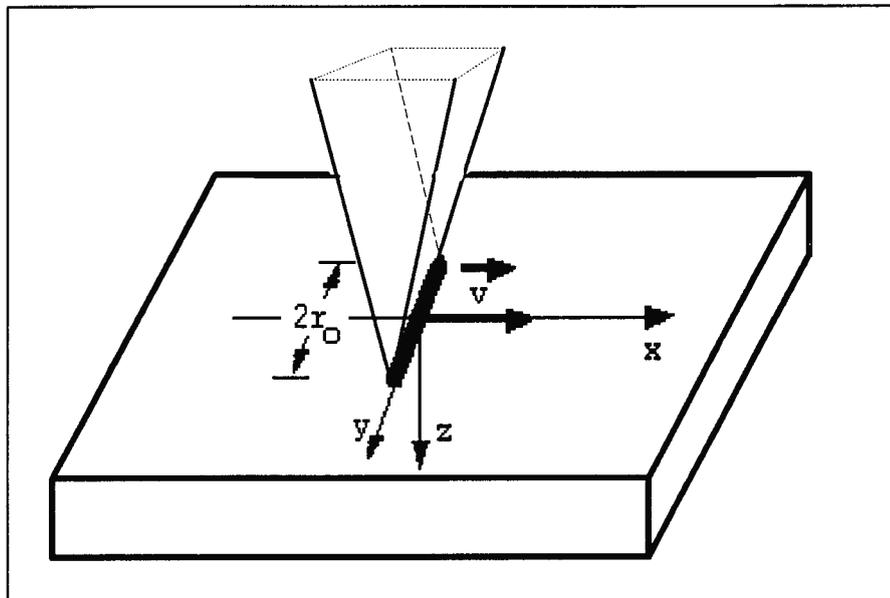


Figura 3.2

Nestas condições o campo de temperatura no plano  $x=0$  dum sistema de eixos fixo no material será, no instante  $t$  (contado a partir do momento em que o feixe atravessa o plano  $x=0$ ):

$$T(y,z,t) = T_{in} + \frac{A P}{2\pi K v \sqrt{t(t+t_0)}} e^{-\frac{1}{4D}\left(\frac{z^2}{t} + \frac{y^2}{t+t_0}\right)} \quad (59.)$$

em que:

$$t_o = \frac{r_o^2}{4D} \quad (60.)$$

é o intervalo de tempo típico necessário para que o calor se difunda ao longo da distância correspondente ao raio do feixe.

No entanto, como Ashby e Easterling observam, tal equação conduz a temperaturas infinitas na origem\*, visto que se supõe que uma quantidade finita de energia é libertada instantaneamente numa linha, de comprimento finito mas de espessura nula. Visto que tal situação é fisicamente irrealista, torna-se necessário obter uma solução que leve em conta o facto de o calor se libertar na superfície do material durante um intervalo de tempo dado tipicamente por:

$$\Delta t \cong \frac{r_o}{v} \quad (61.)$$

Ashby e Easterling conseguem isso por considerar que a fonte de calor se encontra, não em  $z = 0$ , mas sim num plano  $z = -z_o$ . Tal fonte fica assim situada numa posição fictícia, acima da superfície do material, ou seja, fora do mesmo.

Obtiveram assim:

$$T(y,z,t) = T_{in} + \frac{A P}{2\pi K v \sqrt{t(t+t_o)}} e^{-\frac{1}{4D} \left( \frac{(z+z_o)^2}{t} + \frac{y^2}{t+t_o} \right)} \quad (62.)$$

Quanto à taxa de aquecimento e arrefecimento obtemos:

---

\* O mesmo também acontece no caso da fonte pontual, como se pode facilmente verificar.

$$\frac{\partial T}{\partial t}(y, z, t) = (T - T_{in}) \left( \frac{(z + z_o)^2}{4Dt^2} + \frac{y^2}{4D(t+t_o)^2} - \frac{2t+t_o}{2t(t+t_o)} \right) \quad (63.)$$

Queremos realçar que neste modelo supõe-se implicitamente que já se atingiu um estado estacionário e que, em consequência, a temperatura é independente de  $x$ . Assim, podemos considerar que se está a calcular a temperatura no plano  $x=0^*$ . Obviamente isto não contempla o efeito de aquecimento do material a jusante da zona em que o feixe incide num dado instante. Logo, para que se possa considerar que tal região está à temperatura inicial  $T_{in}$ , a velocidade do feixe  $v$  não poderá ser muito baixa. Compreende-se assim porque este modelo será tanto mais realista quanto maior for  $v$ .

Quanto à região a montante, podemos considerar que a temperatura num ponto  $(-x, y, z)$  dum sistema de eixos cuja origem se situa no ponto actual de intersecção do eixo do feixe com a superfície, se pode obter da expressão acima para  $T(y, z, t)$ , fazendo :

$$t = \frac{x}{v} \quad (64.)$$

O valor de  $z_o$  é calculado em dois regimes extremos:

1. **Limite  $t \gg t_o$** ; neste regime obtém-se:

$$z_o = \sqrt{\frac{r_o}{e}} \sqrt{\frac{\pi D r_o}{v}} \quad (65.)$$

2. **Limite  $t \ll t_o$** ; neste regime obtém-se:

$$z_o = \sqrt{\frac{1}{2e}} \sqrt{\frac{\pi D r_o}{v}} \quad (66.)$$

---

\* Para qualquer outro plano, faz-se  $t = 0$  no instante em que o feixe laser o atravessar.

Quanto ao regime intermédio, é conveniente de estudar as duas situações extremas, obtendo assim um limite superior e inferior do resultado requerido. Note-se que não é possível tomar  $z_0$  como uma função de  $t$ , visto que o modelo pressupõe que tal grandeza é uma constante.

Para corrigir o campo de temperaturas entrando em linha de conta com calor latente de fusão, Ashby e Easterling propõem uma expressão similar, na qual o valor da potência absorvida  $AP$  é substituído por  $AP - L V_t$ , em que  $V_t$  é o volume fundido por unidade de tempo e  $L$  é o calor latente por unidade de volume.

Queremos salientar algumas limitações deste modelo: em primeiro lugar, considera-se que a transferência de calor se processa apenas por condução. No entanto, um modelo mais realista tem de incluir necessariamente a convecção na zona fundida do material. Entretanto, não estão disponíveis na literatura expressões analíticas que levem em conta tal processo. Com efeito, a resolução simultânea das equações de transferência de energia, massa e momento envolve o uso de métodos numéricos (Diferenças Finitas, Elementos Finitos, etc.), que não consideramos no âmbito deste trabalho. De qualquer forma, alguns autores têm sustentado que se pode obter uma estimativa razoável da influência da convecção no campo de temperaturas multiplicando a condutividade térmica por um factor que pode ser tomado como parâmetro de ajuste a ser estimado experimentalmente. Tal estudo pode ser realizado por comparar cortes transversais de pistas produzidas por laser, em que tenha ocorrido fusão, com o traçado analítico das isotérmicas.

Uma segunda limitação está associada ao calor latente. Por um lado, essa grandeza é considerada apenas como uma parcela a subtrair globalmente ao valor da energia depositada pela fonte laser; em particular, não se considera que tal extracção de calor se dá na interface sólido-líquido. Tudo se passa como se o material estivesse a ser irradiado por uma fonte laser com uma potência absorvida "útil" de  $AP - L V_t$ . Além disso não se consideram os efeitos térmicos associados à subsequente libertação de calor latente na solidificação. No caso de ligas temos ainda que atentar a que a fusão se dá, não a uma temperatura fixa, mas num intervalo de temperaturas, o que pode ser importante, por exemplo, nas estimativas do volume fundido por unidade de tempo.

Como *a priori* não se conhece o valor de  $V_t$ , visto que depende das condições particulares de irradiação, tem de se adoptar um processo iterativo para o cálculo do seu valor (o que pode ser útil no âmbito de certas aplicações, tais como o cladding ou o alloying por laser), bem como obter o campo de temperaturas incluindo o efeito do calor latente.

A estimativa proposta por Ashby e Easterling para  $V_t$  é:

$$V_t = 2 r_0 z_m v \quad (67.)$$

em que  $z_m$  é a profundidade fundida para  $y = 0$ . Podemos assim substituir (62.) pela expressão mais geral:

$$T(y, z, t) = T_{in} + \frac{Q}{\sqrt{t(t+t_0)}} e^{-\frac{1}{4D} \left( \frac{(z+z_0)^2}{t} + \frac{y^2}{t+t_0} \right)} \quad (68.)$$

com:

$$Q = \frac{A P - L V_t}{2 \pi K v} \quad (69.)$$

### 3.2 Desenvolvimento teórico

A partir deste ponto, iremos desenvolver o acima exposto, tendo como objectivo obter uma expressão mais rigorosa para o volume fundido por unidade de tempo [16].

Assim, para estimar o valor de  $V_t$ , podemos escrever a expressão (mais geral que a equação (67.)):

$$V_t = 2 y_m z_m v \quad (70.)$$

em que  $2 y_m$  é o comprimento da zona fundida (para  $z = 0$ ). Nesta expressão, a zona fundida é tomada como tendo um formato rectangular, no plano YOZ. Adiante veremos como entrar em linha de conta com o perfil curvilíneo da interface sólido-líquido.

Entretanto, podemos considerar que  $z_m$  é a profundidade  $z$  (para  $y=0$ ) tal que o valor máximo de temperatura aí atingido (num certo instante  $t_z$ ) é a temperatura de fusão,  $T_f$ . Identicamente,  $y_m$  é a coordenada  $y$  (para  $z=0$ ) tal que o valor máximo de temperatura aí atingido (num certo instante  $t_y$ ) é  $T_f$ .

A condição de máximo é:

$$\frac{2t+t_o}{2t(t+t_o)} = \frac{(z+z_o)^2}{4D t^2} + \frac{y^2}{4D(t+t_o)^2} \quad (71.)$$

Sendo assim obtemos o seguinte sistema de equações, não linear:

$$\begin{cases} T_f = \frac{AP - 2y_m z_m \nu L}{2\pi K \nu \sqrt{t_z(t_z+t_o)}} e^{-\frac{2t_z+t_o}{2(t_z+t_o)}} \\ z_m = \sqrt{2Dt_z \frac{2t_z+t_o}{2(t_z+t_o)}} - z_o \\ T_f = \frac{AP - 2y_m z_m \nu L}{2\pi K \nu \sqrt{t_y(t_y+t_o)}} e^{\frac{z_o^2 t_o}{4Dt_y^2} - \frac{2t_y+t_o}{2t_y}} \\ y_m = \sqrt{2D(t_y+t_o) \frac{2t_y+t_o}{t_y} - z_o^2 \left(\frac{2t_y+t_o}{t_y}\right)^2} \end{cases}$$

(72.a-d)

Como é óbvio, o instante  $t_z$  em que se atinge um máximo de temperatura no eixo dos ZZ será diferente de  $t_y$ , instante em que se atinge um máximo no eixo dos YY. Logo, quanto mais díspares forem tais valores, menos precisa será a aproximação:

$$V_t = 2 y_m z_m v \quad (70.)$$

Visto que a resolução do sistema acima visa apenas a obtenção duma estimativa razoável para  $V_t$ , não é necessário dispendir um elevado esforço computacional para obter soluções muito rigorosas do mesmo -note-se que o sistema é não linear. Sendo assim, propõem-se dois métodos simples de cariz iterativo:

Método iterativo 1) Resolver as duas primeiras equações, tomando  $r_0$  como estimativa inicial para  $y_m$ . Daí obtém-se um valor de  $z_m$ , que pode ser tomado como uma estimativa para a resolução das duas últimas equações do sistema. Obtém-se assim um novo valor de  $y_m$  que agora pode ser tomado como nova aproximação para uma nova resolução das duas primeiras equações. Prosseguir-se-ia com este processo até que sucessivas iterações não alterassem significativamente os valores de  $y_m$  e de  $z_m$ .

Método iterativo 2) Utilizar as duas primeiras equações e os valores do campo de temperaturas  $T(y,z,t)$ . Justifica-se tal proceder pelo facto de em geral o valor de  $y_m$  não diferir muito de  $r_0$ , ao passo que o valor de  $z_m$  é *a priori* completamente desconhecido. Assim, resolvem-se essas equações, tomando novamente como estimativa inicial para  $y_m$  o valor  $r_0$ , donde resulta uma primeira estimativa para  $z_m$ . Ao mesmo tempo é possível obter a função:

$$f(y) = T(y, z = 0, t = t_z) \quad (73.)$$

que dá a temperatura no eixo dos YY. Resolvendo a equação:

$$f(y) = T_f \quad (74.)$$

obtemos uma segunda estimativa para  $y_m$ , que pode agora ser utilizada para calcular uma nova estimativa de  $z_m$ , e assim sucessivamente. Está a supor-se implicitamente que o instante  $t_z$  assim determinado não é muito diferente do valor  $t_y$  que seria determinado pela resolução completa do sistema de 4 equações (72.a-d).

São obtidos assim os valores de  $z_m$  e de  $y_m$ , que podem ser agora usados na estimativa inicial (cf. equação (70.)) para a determinação do valor de  $V_t$  entrando em linha de conta com a forma geométrica da interface sólido-líquido, nomeadamente através do cálculo da área limitada por essa curva no semiplano positivo YOZ.

Para isso, consideremos (cf. equações (68.) e (69.)):

$$T_f = T_{in} + \frac{Q}{\sqrt{t(t+t_o)}} e^{-\frac{1}{4D} \left( \frac{(z+z_o)^2}{t} + \frac{y^2}{t+t_o} \right)} \quad (75.)$$

Para cada instante  $t$  fixo, a expressão acima representa uma curva no plano YOZ, que é a interface sólido-líquido. A equação dessa curva pode ser escrita na seguinte forma:

$$Y(z,t) = \sqrt{(t+t_o)} \left[ 4D \ln \left( \frac{Q}{(T_f - T_{in}) \sqrt{t(t+t_o)}} \right) - \frac{(z+z_o)^2}{t} \right] \quad (76.)$$

Assim, pode-se obter uma melhor estimativa para o volume de material que está a ser fundido por unidade de tempo. Para esse fim, podemos calcular para qualquer instante  $t$  o valor da área da zona fundida no plano YOZ:

$$W(t) = 2 \int_0^{z^*(t)} Y(z,t) dz \quad (77.)$$

em que  $z^*(t)$  é a profundidade fundida, no instante  $t$ , medida ao longo do eixo dos ZZ.

Podemos em seguida calcular o valor máximo de  $W(t)$ , que pode ser considerado como uma melhor estimativa que o produto  $2 z_m y_m$  para efeitos do cálculo do parâmetro  $Q$ . Adoptamos assim um novo procedimento iterativo, que deve ser interrompido quando iterações sucessivas não produzam alterações no valor de  $V_t$ . De notar que é atingido assim um duplo objectivo:

1º) Obtenção do campo de temperaturas entrando em linha de conta com o consumo de energia associado ao calor latente. Isso é feito inserindo no cálculo a forma geométrica da interface sólido-líquido.

2º) Cálculo do volume fundido por unidade de tempo.

A escolha do valor máximo de  $V_t(t)$  para efeitos do cálculo do parâmetro  $Q$ , que decorre naturalmente do significado de  $z_m$  e de  $y_m$ , pode ser justificada adicionalmente do seguinte modo: ao se atingir o estado estacionário, um observador ligado a um sistema de eixos fixo no material veria o avanço da zona de fusão a velocidade constante  $v$  e segundo o eixo dos  $XX$ . Para que a forma de tal zona se mantenha constante no tempo, é necessário que se funda num intervalo de tempo  $dt$  o volume de material:

$$dV = Af dx = Af v dt \quad (78.)$$

em que  $Af$  é a área da região da interface sólido-líquido que está a fundir. É fácil concluir que, se a frente de fusão for aproximadamente paralela ao plano  $YOZ$  (o que tenderá a acontecer quanto maior for a velocidade),  $Af$  será aproximadamente igual ao máximo de  $W(t)$ . Logo, o volume fundido por unidade de tempo vem:

$$V_t \equiv \frac{dV}{dt} \equiv v \max[W(t)] \quad (79.)$$

O valor de  $V_t$  assim determinado terá de ser igual ao valor que entra na definição de  $Q$  e que permite o cálculo de  $W$ . Compreende-se assim mais facilmente a necessidade da adopção dum método iterativo para o cálculo de  $V_t$ , em que uma estimativa desse valor produz a estimativa seguinte através da equação (79.).

Para o cálculo da coordenada da intersecção da interface sólido-líquido com o eixo dos  $ZZ$ ,  $z^*(t)$ , resolve-se a seguinte equação :

$$Y(z = z^*(t), t) = 0 \quad (80.)$$

donde obtemos (cf. equação (76.)):

$$z^*(t) = \sqrt{4Dt \ln \left( \frac{Q}{(T_f - T_{in}) \sqrt{t(t+t_o)}} \right)} - z_o \quad (81.)$$

Podemos rescrever a expressão de  $Y(z,t)$  na seguinte forma:

$$Y(z,t) = \sqrt{a(t) + b(t)z + c(t)z^2} \quad (82.)$$

sendo:

$$\begin{cases} a(t) = 4D(t+t_o) \ln\left(\frac{Q}{(T_f - T_{in})\sqrt{t(t+t_o)}}\right) + c(t)z_o^2 \\ b(t) = 2c(t)z_o \\ c(t) = -\frac{t+t_o}{t} \end{cases} \quad (83.a-c)$$

Quanto à primitiva de  $Y(z,t)$ , pode ser obtida da seguinte forma [17]:

$$\int \sqrt{R(x)} dx = \frac{(2cx + b)\sqrt{R(x)}}{4c} + \frac{\Delta}{8c} \int \frac{dx}{\sqrt{R(x)}} \quad (84.)$$

sendo:

$$\begin{cases} R(x) = a + bx + cx^2 \\ \Delta = 4ac - b^2 \end{cases} \quad (85.a-b)$$

Para  $c < 0$  e  $\Delta < 0$ , o que é o caso, obtém-se:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{R(x)}} = -\frac{1}{\sqrt{-c}} \arcsin\left(\frac{2cx + b}{\sqrt{-\Delta}}\right) \quad (86.)$$

Chegamos assim finalmente a uma expressão analítica para  $V_f$ :

$$V_t = 2 v \max \left\{ \frac{\Delta}{8 c \sqrt{-c}} \left[ \arcsin \left( \frac{b}{\sqrt{-\Delta}} \right) - \arcsin \left( \frac{2 c z^* + b}{\sqrt{-\Delta}} \right) \right] - \frac{b \sqrt{a}}{4 c} \right\} \quad (87.)$$

Se quisermos saber a evolução temporal da intersecção da interface sólido-líquido com os eixos YY e ZZ, podemos obter:

- a) Eixo dos YY: basta obter a função  $y = Y(z = \theta, t)$  (cf. equação (76.)).
- b) Eixo dos ZZ: é a função  $z^*(t)$ .

Para determinar os instantes de início e fim de fusão, bastará determinar os zeros de qualquer uma de tais funções (ambas terão os mesmos zeros, como é óbvio).

Saliente-se que o cálculo da isotérmica  $y = Y(z, t)$  para sucessivos valores de  $t$ , compreendidos entre tais zeros, permite obter o formato tridimensional da zona fundida. Isso é assim visto que, conforme já mencionado, a um dado instante  $t$  corresponde um valor de  $x$  dado por:  $x = v t$ . Ao fazer isso poderíamos iniciar um novo processo iterativo, em que através do cálculo directo de  $Af^*$ , se iria obter um valor ainda mais preciso para  $V_t$  por meio de (cf. equação (78.)):

$$V_t = Af^* v \quad (88.)$$

o que não faremos aqui. Pretende-se que esse seja, aliás, um desenvolvimento adicional do presente trabalho.

### 3.3 Cálculos

Vamos ilustrar os resultados que se podem obter a partir do modelo de Ashby e Easterling através da realização de alguns cálculos referentes ao tratamento por laser dum aço inoxidável austenítico, o aço AISI 304, tendo como objectivo estimar o volume fundido por unidade de tempo.

---

\* Isso pode ser feito entrando em conta com o formato tridimensional da interface sólido-líquido

As propriedades são [18]:

$$K = 27 \text{ W m}^{-1} \text{ K}^{-1}$$

$$D = 5.4 \times 10^{-6} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$$

$$T_f = 1450 \text{ }^\circ\text{C} \text{ (temperatura liquidus* )}$$

$$L = 2.1 \times 10^9 \text{ J m}^{-3}.$$

Consideremos os seguintes dados referentes ao feixe laser:

raio	$r_0 / 10^{-3} \text{ m}$	2
potência absorvida	$AP / \text{W}$	625
velocidade	$v / 10^{-3} \text{ m s}^{-1}$	5

Obtiveram-se os seguintes resultados:

Grandeza	Valor	Comentários
$t_0 / \text{s}$	<b>0.185</b>	O cálculo deste parâmetro (equação (60.)) é necessário para poder escolher a aproximação a adoptar.

Adoptou-se em primeiro lugar a aproximação:  $t \gg t_0$  (dita aproximação A). Obteve-se:

Grandeza	Valor	Comentários
$V_t / 10^{-9} \text{ m}^3 \text{ s}^{-1}$	<b>1.54</b>	Estimativa obtida de acordo com a equação (70.) através da resolução do sistema (72.a-d) pelo método iterativo 2.

---

\* Visto que se trata agora de uma liga, deixa de fazer sentido falar da interface sólido-líquido como sendo uma superfície, visto que ela é neste caso uma região tridimensional limitada pelas isotérmicas liquidus e solidus. O facto de tomarmos  $T_f$  como sendo igual à temperatura liquidus implica que nos cálculos que iremos apresentar os valores calculados para o volume de fase líquida devem ser tomados como estimativas por excesso.

Grandeza	Valor	Comentários
Potência consumida na forma de calor latente, $L V_t / W$	3.2	O valor obtido é desprezável face ao da potência absorvida (625 W), o que indica que para o mero cálculo do campo de temperaturas não se justificaria neste caso considerar o efeito do calor latente. No entanto, isso já se torna necessário quando o objectivo é o cálculo de $V_t$ .
Instante de início de fusão / $10^{-3}$ s	74	É importante calcular este valor, pois só faz sentido calcular a posição da interface sólido-líquido para instantes posteriores a esse.
Instante para o qual $W(t)$ (equação (77.)) é máximo / s	0.14	Vê-se que a adopção da aproximação $t \gg t_0$ não é suficiente para a resolução deste problema. Teremos de realizar cálculos similares para o caso $t \ll t_0$ para obter estimativas dos resultados desejados com base nestes dois regimes extremos.
$V_t / 10^{-9} \text{ m}^3 \text{ s}^{-1}$	0.895	Valor calculado com base na equação (79.). De notar que não se afasta muito da estimativa inicial.

Apresenta-se na figura 3.3 a função  $Y(z,t)$  para 3 instantes distintos (chama-se a atenção para o facto de, neste caso, a escala correspondente aos dois eixos ser diferente). Na figura 3.4 está representada a evolução temporal da intersecção da isotérmica líquida com os eixos YY e ZZ. É interessante confirmar que os máximos correspondentes a tais curvas, anteriormente já mencionados como  $t_y$  e  $t_z$ , efectivamente não coincidem. No entanto, nota-se claramente que, ao tomar o valor do comprimento da zona fundida para  $t = t_z$ , tal aproximação conduz a um resultado que não difere muito do valor da profundidade máxima fundida. Outro aspecto que queremos realçar é que a figura 3.4 permite ter uma ideia da forma tridimensional da zona líquida. De facto, visto que  $x = vt$ , o eixo dos tempos do gráfico pode ser transformado directamente no eixo dos XX,

## Interface sólido-líquido

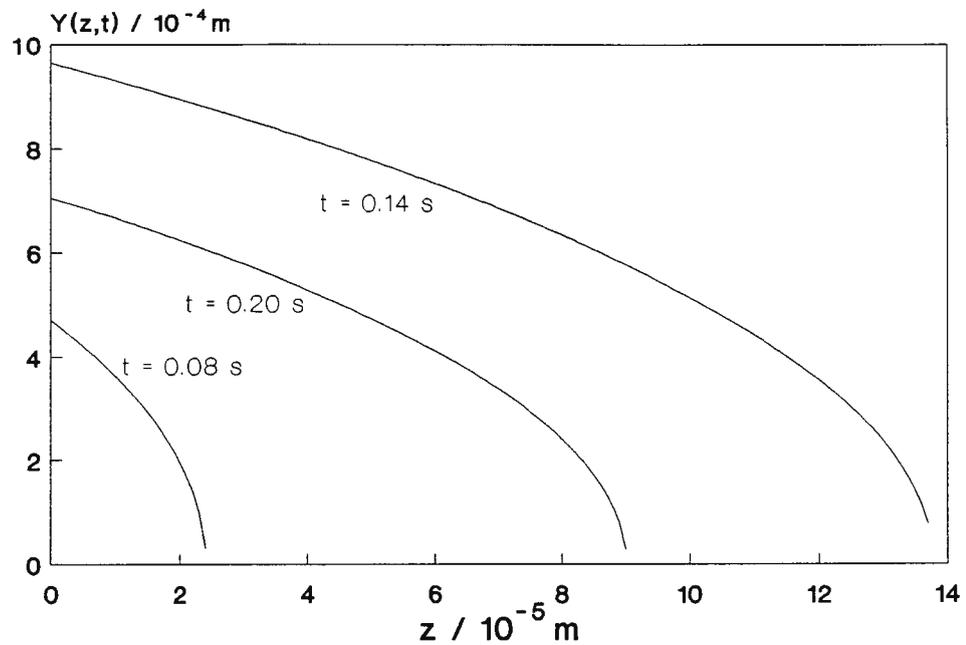


FIGURA 3.3

## Intersecção da interface sólido-líquido com os eixos OY e OZ

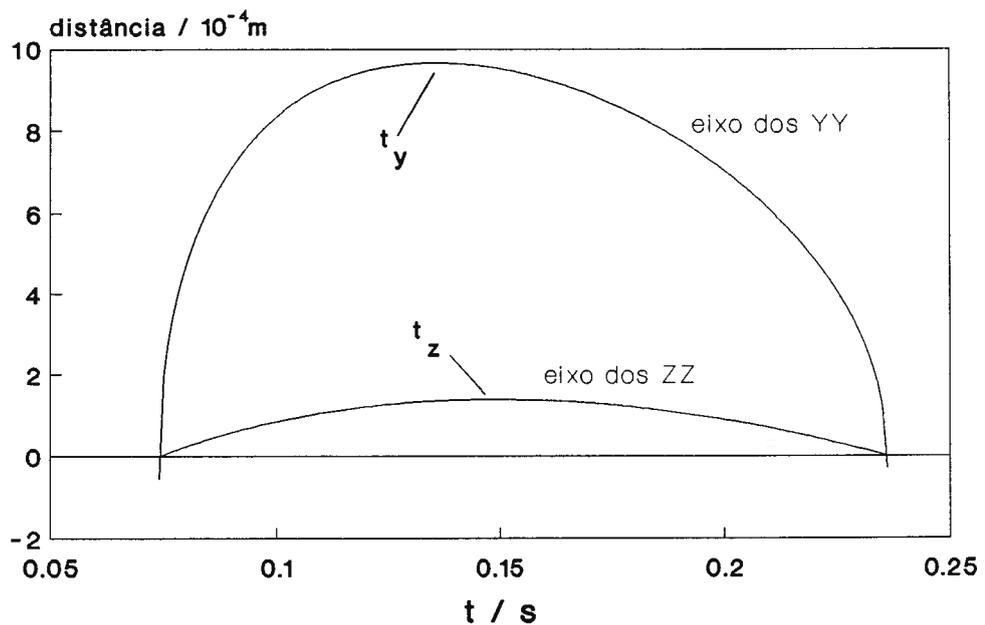


FIGURA 3.4

tendo em mente que a um intervalo de tempo de  $1 \text{ s}$  corresponde uma distância de  $5 \text{ mm}$ . Sendo assim, obtemos, uma vista de topo e um corte longitudinal (invertido) da zona fundida.

Entretanto, visto dispormos de um valor mais preciso para  $V_t$ , podemos agora calcular a distribuição de temperaturas tendo em conta o efeito do calor latente. Podemos, por exemplo, traçar a evolução temporal da temperatura na origem do sistema de coordenadas (figura 3.5), ou obter perfis de temperatura em profundidade, para várias distâncias ao eixo dos  $XX$ , traçados num dado instante (por exemplo, no instante em que a temperatura na origem do sistema de coordenadas é máxima, que é o que está representado na figura 3.6).

Mantendo para já a aproximação adoptada, podemos estudar o efeito da variação da velocidade de passagem do laser  $v$  e também do raio do feixe  $r_0$ . Consideremos assim os seguintes dados referentes ao feixe laser:

raio	$r_0 / 10^{-3} \text{ m}$	2
potência absorvida	$AP / \text{W}$	625
velocidade	$v / 10^{-3} \text{ m s}^{-1}$	1.25

ou seja, a velocidade é reduzida para 1/4 do valor anterior\* .

Obtiveram-se os seguintes resultados:

Grandeza	Valor	Comentários
$V_t / 10^{-9} \text{ m}^3 \text{ s}^{-1}$	13.0	Estimativa obtida de acordo com a equação (70.) através da resolução do sistema (72.a-d) pelo método iterativo 2.

---

\* Note-se que o parâmetro  $t_0$  não é alterado.

## Temperatura vs. tempo

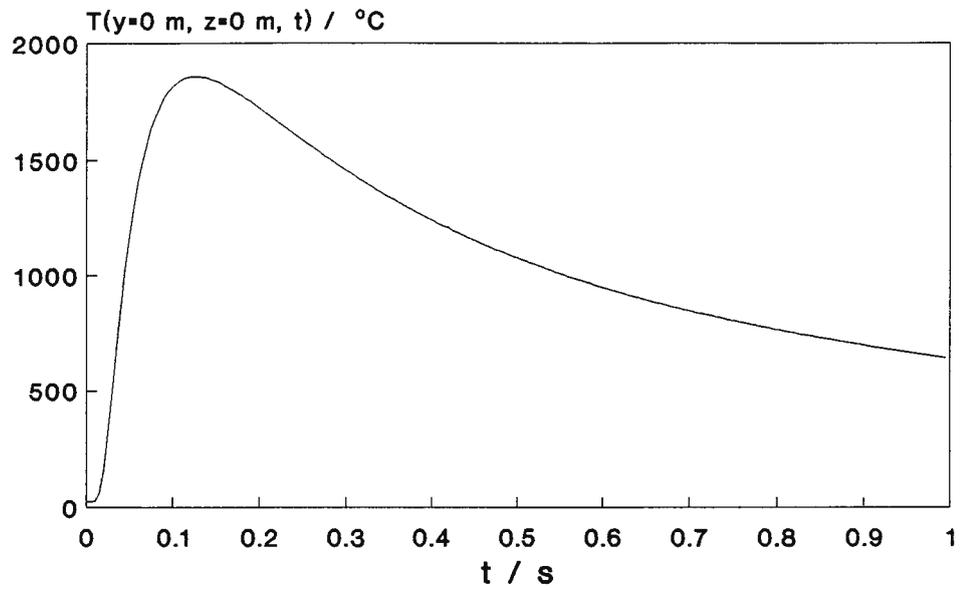


FIGURA 3.5

## Temperatura vs. profundidade

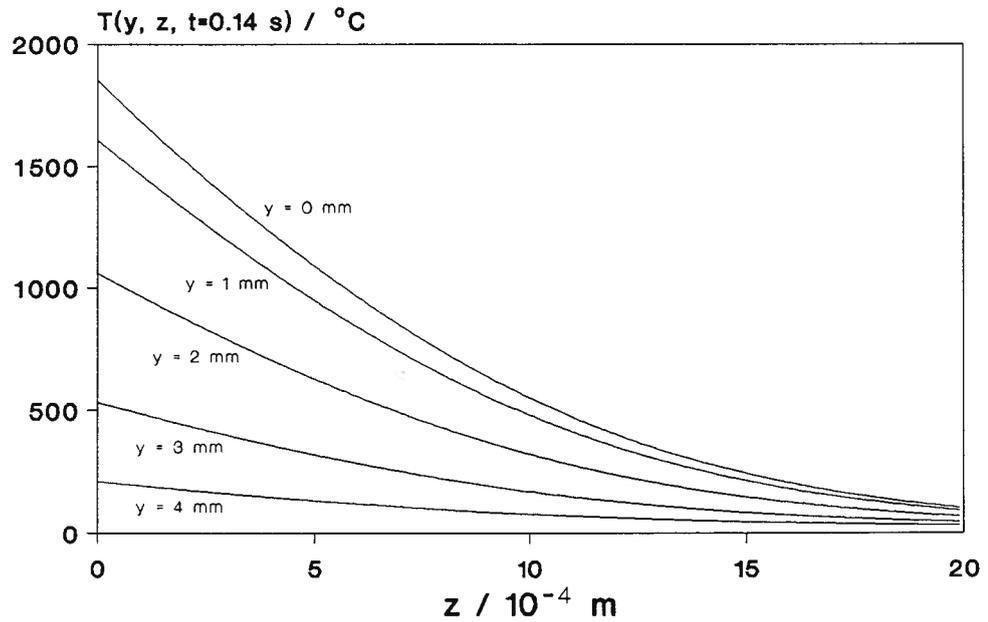


FIGURA 3.6

Grandeza	Valor	Comentários
Potência consumida na forma de calor latente, $L V_f / W$	27	Nestas condições, já é recomendável que o efeito do calor latente seja levado em consideração para o cálculo do campo de temperatura.
$V_f / 10^{-9} \text{ m}^3 \text{ s}^{-1}$	9.2	Valor calculado com base na equação (79.). À primeira vista este resultado parece estranho, visto que através dessa equação menores velocidades aparentemente implicam menores valores de $V_f$ . No entanto, não esquecer que o tempo típico de interação entre o feixe laser e um dado elemento de volume situado junto da superfície é dado pela expressão (61.). Assim, menores velocidades implicam que maior energia é depositada em tal elemento de volume, o que conduz à fusão de uma maior quantidade de matéria e daí a um maior valor de $V_f$ .

Nas figuras 3.7 a-d representam-se as formas da interface sólido-líquido para três instantes distintos, em que um pertence ao regime de aquecimento, outro ao de arrefecimento e o terceiro corresponde à transição de um regime para o outro. Na figura 3.7a tais isotérmicas são representadas em conjunto, com escalas diferentes para os eixos. No entanto nas figuras 3.7b - 3.7d temos as mesmas isotérmicas, desta feita representadas como se se tratasse de um corte transversal da zona fundida, no qual ambos os eixos têm agora a mesma escala. É interessante notar que uma sucessão de tais cortes, calculados para instantes compreendidos entre o início e o fim da fusão, permitiria gerar a forma tridimensional da zona fundida.

## Interface sólido-líquido

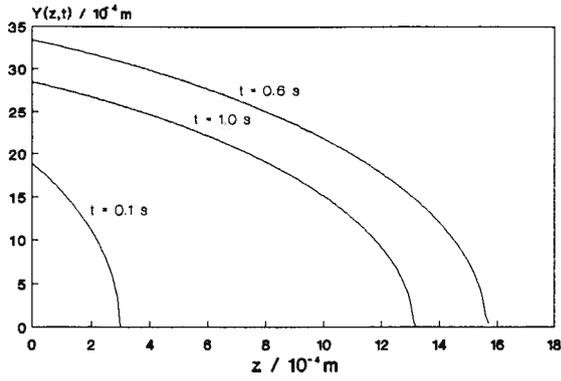


FIGURA 3.7(A)

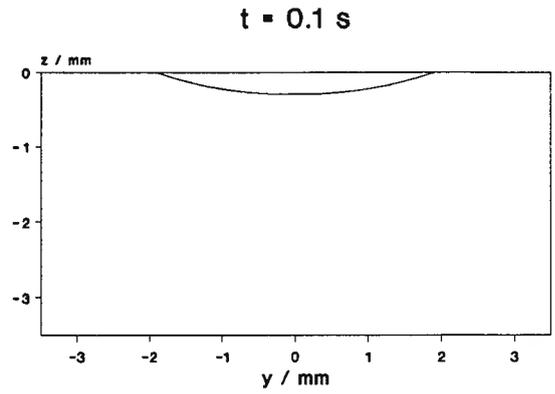


FIGURA 3.7 (B)

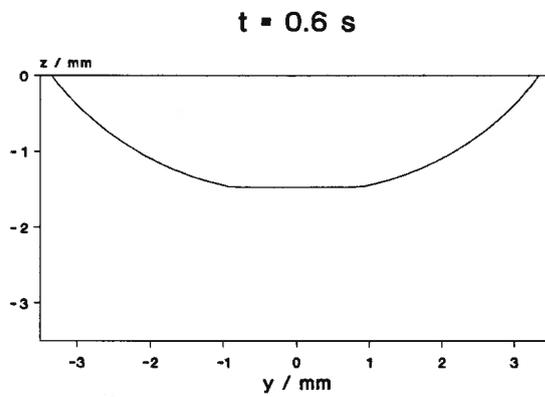


FIGURA 3.7 (C)

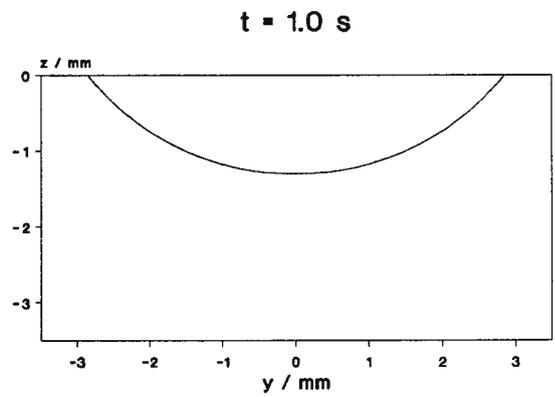


FIGURA 3.7 (D)

Consideremos agora os seguintes dados:

raio	$r_0 / 10^{-3} \text{ m}$	1
potência absorvida	$AP / W$	625
velocidade	$v / 10^{-3} \text{ m s}^{-1}$	5

ou seja, reduz-se o raio do feixe para metade do valor anterior, mantendo o valor original da velocidade. Assim, o mesmo valor de potência é libertado numa área inferior. Quantitativamente, a densidade de potência é 4 vezes superior à do caso anterior. Queremos assim obter uma comparação entre resultados que se obtêm por variar por um factor de 4 a velocidade e a densidade de potência, que são variáveis independentes. Representando a isotérmica liquidus no instante de transição aquecimento / arrefecimento em conjunto com isotérmicas similares dos dois casos descritos anteriormente, conforme a figura 3.8, podemos concluir o seguinte:

1º) Comparando com o primeiro caso ( $r_0 = 2 \text{ mm}$ ,  $v = 5 \text{ mm/s}$ ), conclui-se que a maior densidade de potência justifica uma maior profundidade (e largura) fundida.

2º) Uma comparação com o segundo caso ( $r_0 = 2 \text{ mm}$ ,  $v = 1.25 \text{ mm/s}$ ) revela que o maior valor da densidade de potência não é suficiente para conferir ao material uma maior profundidade fundida, uma vez que neste caso o efeito provocado pela menor velocidade acaba por predominar.

Com esta análise sumária pretende-se apenas demonstrar que a influência dos parâmetros associados à interacção laser-matéria não é, de modo algum, linear. Sendo assim, compreende-se a utilidade do emprego de modelos matemáticos, que mesmo que não sejam rigorosos permitem obter as relações (essencialmente não-lineares) entre os parâmetros da interacção e os resultados. Tendo tal não-linearidade em mente, não surpreende o valor obtido para o volume fundido por unidade de tempo:

Grandeza	Valor	Comentários
$V_f / 10^{-9} \text{ m}^3 \text{ s}^{-1}$	11.0	Valor calculado com base na equação (79.). De notar neste caso que este resultado é superior ao valor anterior, apesar da largura e profundidade fundidas serem inferiores. De facto, o que acontece é que neste caso prevalece o maior valor de $v$ .

Cálculos similares podem agora ser feitos para a outra aproximação:  $t \ll t_0$  (dita aproximação B). Apresentam-se assim na figura 3.9 os resultados de volume fundido por unidade de tempo para ambas as aproximações e para os três casos já mencionados anteriormente. Podemos retirar as seguintes conclusões:

1<sup>a</sup>) A aproximação B conduz às mesmas conclusões que a aproximação A.

2<sup>a</sup>) Ambas as aproximações conduzem a resultados semelhantes, o que permite supor que os valores do volume fundido por unidade de tempo calculados com base na média dos dois valores extremos são fiáveis.

Não é demais salientar que as previsões obtidas para  $V_f$  com este modelo não entram em linha de conta com a transferência de calor por convecção. Nessa medida, devemos tomá-las como estimativas por excesso\*, válidas em termos de ordem de grandeza, sendo tão mais precisas quanto maior for o valor da condutividade térmica.

---

\* Note-se que não estamos a considerar termos dissipativos na equação de Fourier.

## Interface sólido-líquido (variação com $v$ e $r$ )

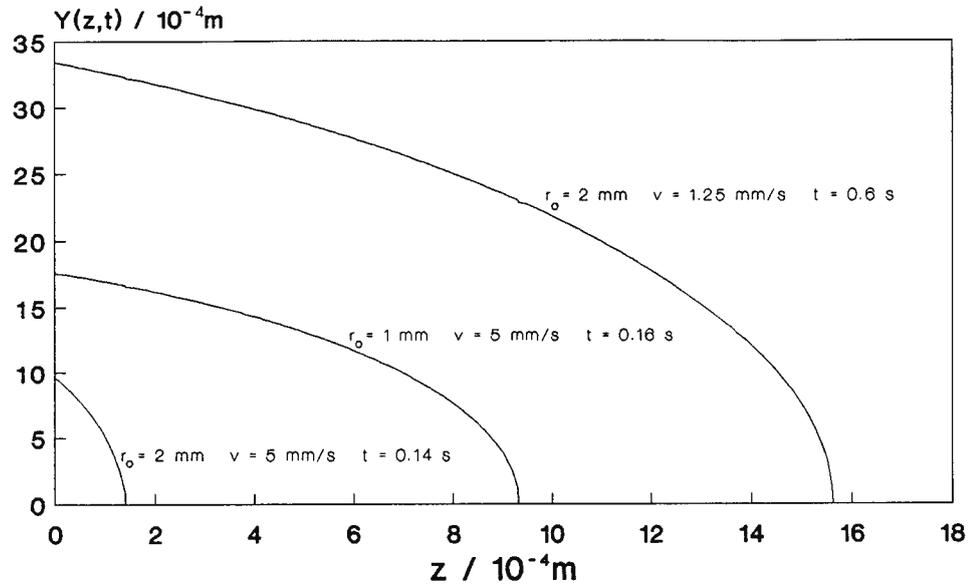


FIGURA 3.8

## Volume fundido por unidade de tempo

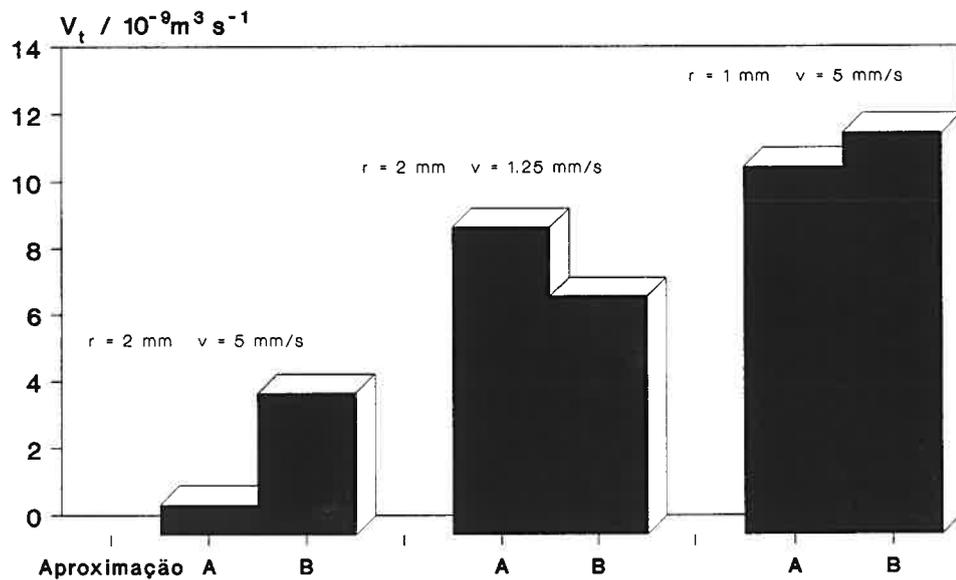


FIGURA 3.9

### 3.4 Conclusões

1. Apresentou-se de forma detalhada o modelo de fonte linear móvel de comprimento finito, desenvolvido por Ashby e Easterling.

2. Desenvolveu-se tal modelo com o objectivo primário de desenvolver um método analítico que permita obter estimativas para o volume fundido por unidade de tempo.

3. Numa primeira abordagem, isso foi feito pela estimativa da profundidade e do comprimento máximo fundido. Seguidamente, obteve-se a expressão analítica da posição da isotérmica de fusão (ou da isotérmica liquidus, para o caso de ligas), que é uma função cujo integral é conhecido. Tal integração permitiu obter uma expressão analítica (mais precisa) para o volume fundido por unidade de tempo.

4. Pretende-se que desenvolvimentos futuros incluam o cálculo do volume fundido por unidade de tempo de modo a ter em conta o formato tridimensional da zona líquida.

## **4. Relação entre a temperatura de pré-aquecimento e a potência em tratamento de materiais por laser**

### **4.1 Considerações gerais**

Surge com bastante frequência a necessidade de realizar tratamentos por laser em materiais pré-aquecidos, i.e., cuja temperatura inicial é superior à temperatura ambiente. Isso é feito para reduzir os elevados gradientes de temperatura que se desenvolvem no material resultantes da irradiação. O pré-aquecimento tende a reduzir a incidência de poros e fendas internas no material, defeitos frequentemente encontrados nestes tratamentos.

Sendo assim, seria desejável obter um método que fornecesse a alteração a introduzir nos dados (por exemplo, a velocidade, a potência ou o raio do feixe) para produzir os mesmos resultados (por exemplo, a profundidade fundida) ao passar de uma experiência em que não se use pré-aquecimento para uma em que tal processo seja empregue.

Tomemos um exemplo de como o problema pode ser posto: partindo de uma temperatura inicial igual à temperatura ambiente e sabendo o valor da potência que determinou que se atingisse um certo valor da temperatura (por exemplo, a temperatura de fusão) a uma determinada profundidade no material, pretende-se obter o valor da potência a usar para se poder atingir o mesmo valor da temperatura à mesma profundidade, partindo de uma temperatura inicial superior à temperatura ambiente.

Obviamente, as temperaturas que ocorrem a outras profundidades não irão coincidir. No entanto, é comum requerer-se apenas que a profundidade "tratada" seja a mesma, ou seja, exige-se que apenas uma (e uma só) determinada isotérmica, para ambos os casos, passe pelo mesmo ponto do material\*. No âmbito do presente trabalho iremos

---

\* Por exemplo, a isotérmica de fusão ou a isotérmica liquidus.

considerar que esse é o resultado idêntico que se pretende obter, usando ou não um processo de pré-aquecimento antes do tratamento por laser.

Sendo assim, desenvolveu-se um método de determinação simples das potências a usar em condições de pré-aquecimento, de acordo com o acima exposto. Detalhes de tal método, bem como evidência experimental da sua validade foram apresentados recentemente [19]. Passaremos em seguida à sua descrição.

#### 4.2 Desenvolvimento teórico

Consideremos a expressão que dá o valor da temperatura no eixo do feixe laser, considerado como uma fonte pontual móvel de potência  $A P$  que se move com velocidade  $v$  na superfície dum dado material, supondo que já se atingiu o estado estacionário (cf. equação (57.)):

$$T(\theta, \theta, z) = \theta + \frac{A P}{2 \pi K z} e^{-\frac{vz}{2D}} \quad (89.)$$

em que  $\theta$  é a temperatura inicial.

Queremos que se atinja o mesmo valor da temperatura  $\tau_I$  (por exemplo. a temperatura de fusão) à profundidade  $z$  no interior do material, usando a mesma velocidade  $v$  mas para dois valores diferentes da temperatura inicial,  $\theta$ :

$$\begin{cases} \tau_I = \theta_A + \frac{A P_{\theta_A \rightarrow \tau_I}}{2 \pi K z} e^{-\frac{vz}{2D}} \\ \tau_I = \theta_B + \frac{A P_{\theta_B \rightarrow \tau_I}}{2 \pi K z} e^{-\frac{vz}{2D}} \end{cases} \quad (90.)$$

em que  $P_{\theta \rightarrow \tau_I}$  é o valor da potência a usar em cada um dos casos. Eliminando  $\tau_I$  obtemos:

$$P_{\theta_A \rightarrow \tau_I} = P_{\theta_B \rightarrow \tau_I} - \beta \Delta \theta \quad (91.)$$

sendo:

$$\Delta\theta \equiv \theta_A - \theta_B \quad (92.)$$

e

$$\beta \equiv \frac{2\pi Kz}{A} e^{\frac{vz}{2D}} \quad (93.)$$

Desenvolvendo:

$$P_{\theta_A \rightarrow \tau_1} = P_{\theta_B \rightarrow \tau_1} (1 - \varepsilon_1) \quad (94.)$$

sendo:

$$\varepsilon_1 \equiv \frac{\beta \Delta\theta}{P_{\theta_B \rightarrow \tau_1}} \quad (95.)$$

Se for:

$$\varepsilon_1 \ll 1 \quad (96.)$$

podemos tomar:

$$e^{-\varepsilon_1} \approx 1 - \varepsilon_1 \quad (97.)$$

logo:

$$P_{\theta_A \rightarrow \tau_1} = P_{\theta_B \rightarrow \tau_1} e^{-\varepsilon_1} \quad (98.)$$

Para uma temperatura máxima diferente  $\tau_2$ , mas mantendo as mesmas temperaturas iniciais, escrevemos identicamente:

$$P_{\theta_A \rightarrow \tau_2} = P_{\theta_B \rightarrow \tau_2} e^{-\varepsilon_2} \quad (99.)$$

logo:

$$\frac{P_{\theta_A \rightarrow \tau_1}}{P_{\theta_A \rightarrow \tau_2}} = \frac{P_{\theta_B \rightarrow \tau_1}}{P_{\theta_B \rightarrow \tau_2}} e^{-(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)} \quad (100.)$$

Se se verificar a condição:

$$|\varepsilon_1 - \varepsilon_2| = \beta \Delta\theta \left| \frac{1}{P_{\theta_B \rightarrow \tau_1}} - \frac{1}{P_{\theta_B \rightarrow \tau_2}} \right| \lll 1 \quad (101.)$$

(o que acontecerá desde que  $P_{\theta_B \rightarrow \tau_1}$  e  $P_{\theta_B \rightarrow \tau_2}$  sejam suficientemente próximos), então poderemos escrever:

$$e^{-(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)} \approx 1 \quad (102.)$$

logo obtemos uma proporcionalidade directa entre os valores da potência:

$$\frac{P_{\theta_A \rightarrow \tau_1}}{P_{\theta_A \rightarrow \tau_2}} = \frac{P_{\theta_B \rightarrow \tau_1}}{P_{\theta_B \rightarrow \tau_2}} \quad (103.)$$

Sem perda de generalidade, tomemos  $\theta_A$  como sendo a temperatura de pré-aquecimento pretendida e  $\theta_B$  como sendo a temperatura ambiente. Considerando que esta é 25 °C e abandonando o índice "A", podemos rescrever a última equação:

$$\frac{P_{\theta \rightarrow \tau_1}}{P_{\theta \rightarrow \tau_2}} = \frac{P_{25 \rightarrow \tau_1}}{P_{25 \rightarrow \tau_2}} \quad (104.)$$

ou seja:

$$\frac{P_{\theta \rightarrow \tau_1}}{P_{25 \rightarrow \tau_1}} = \frac{P_{\theta \rightarrow \tau_2}}{P_{25 \rightarrow \tau_2}} \quad (105.)$$

De notar que as temperaturas  $\tau_1$  e  $\tau_2$  não necessitam de ser calculadas explicitamente, pois elas apenas traduzem a obtenção de um resultado diferente\* numa certa zona do material à profundidade  $z$ . De facto,  $\tau_1$  e  $\tau_2$  são arbitrários, embora naturalmente se devam situar dentro dos limites impostos pelas aproximações (96.)-(97.) e (101.)-(102.).

---

\* Neste caso, um resultado diferente significa considerar valores distintos para a temperatura de tratamento.

Podemos assim apresentar o seguinte enunciado:

Considerando um certo par de temperaturas iniciais, desde que sejam satisfeitas as aproximações (96.)-(97.) e (101.)-(102.), a razão entre potências que produzem um mesmo valor  $\tau$  da temperatura a uma profundidade fixa  $z$  de um dado material é independente do valor particular de  $\tau$  atingido; ou ainda, em termos mais práticos:

Considerando um certo par de temperaturas iniciais, desde que sejam satisfeitas as aproximações (96.)-(97.) e (101.)-(102.), a razão entre potências que produzem um mesmo resultado a uma profundidade fixa  $z$  de um dado material é independente do resultado particular obtido.

Para vermos mais claramente a utilidade da equação (105.) consideremos o seguinte problema concreto:

Considerem-se conhecidos, para um dado material, os  $n$  valores genéricos da potência  $P_{25 \rightarrow \tau_i}$  a usar para produzir, a uma mesma profundidade  $z$ , a temperatura  $\tau_i$ , partindo da temperatura ambiente ( $i = 1, 2, \dots, n$ ).

Considerando agora uma certa temperatura de pré-aquecimento  $\theta$  e para cada um desses  $n$  casos, gostaríamos de conhecer os valores de potência  $P_{\theta \rightarrow \tau_i}$  a usar para produzir o mesmo valor  $\tau_i$ , à profundidade  $z$ .

Para tal, começamos por estudar aquele que denominaremos por caso padrão, para o qual iremos determinar  $P_{\theta \rightarrow \tau}$  sabendo  $P_{25 \rightarrow \tau}$ . Tal determinação pode ser feita por via experimental (tentando obter o mesmo valor da profundidade fundida, por um método de aproximações sucessivas) ou por via teórica. Neste caso, e no âmbito do presente modelo, obtemos (cf. equação (91.):

$$P_{\theta \rightarrow \tau} = P_{25 \rightarrow \tau} - \beta (\theta - 25) \quad (106.).$$

Para cada par  $(P_{25 \rightarrow \tau}, P_{25 \rightarrow \tau_i})$  que satisfizer a condição (101.), teremos:

$$P_{\theta \rightarrow \tau_i} = P_{\theta \rightarrow \tau} \frac{P_{25 \rightarrow \tau_i}}{P_{25 \rightarrow \tau}} \quad (107.)$$

ou seja, o valor que se pretende obter é o produto de dois valores conhecidos previamente:

1°. Valor da potência determinado para o caso padrão para a mesma temperatura inicial;

2°. Valor da potência conhecido (e relativamente ao qual se pretende obter o mesmo resultado), adimensionalizado pelo valor correspondente para o caso padrão.

Em relação à escolha do valor padrão  $P_{25 \rightarrow \tau}$ , sugere-se que ele seja obtido da seguinte maneira:

$$P_{25 \rightarrow \tau} = \frac{\max(P_{25 \rightarrow \tau_i}) + \min(P_{25 \rightarrow \tau_i})}{2} \quad (108.)$$

para favorecer a verificação da aproximação (101.)-(102.) para todos os pares  $(P_{25 \rightarrow \tau}, P_{25 \rightarrow \tau_i})$ .

Será útil, para efeitos práticos, traduzir de forma quantitativa as aproximações (96.)-(97.) e (101.)-(102.). Para isso, aplicaremos o seguinte critério: a expansão polinomial usada da função exponencial é válida desde que o erro relativo não ultrapasse os 10%. Apliquemos este critério para o caso da aproximação (96.)-(97.):

$$\frac{e^{-\varepsilon} - (1 - \varepsilon)}{1 - \varepsilon} \leq 10\% \quad (109.)$$

ou:

$$\frac{e^{-\varepsilon_{max}}}{1 - \varepsilon_{max}} = 1,1 \quad (110.)$$

em que  $\varepsilon_{max}$  é o máximo dos valores que satisfazem a condição (109.). Resolvendo esta equação não linear, obtemos:

$$\varepsilon_{max} = 0.3755 \quad (111.)$$

Logo, o valor máximo da temperatura de pré-aquecimento  $\theta_{max}$  é dado por:

$$\Delta\theta_{max} = \theta_{max} - 25 = 0.3755 \frac{P_{25 \rightarrow \tau}}{\beta} \quad (112.)$$

Aplicamos agora o mesmo critério para o caso da aproximação (101.)-(102.).  
Definindo:

$$\delta \equiv \beta \Delta\theta \left( \frac{1}{P_{25 \rightarrow \tau}} - \frac{1}{P_{25 \rightarrow \tau_1}} \right) \quad (113.)$$

a equação a resolver para o valor máximo de  $\delta$  é:

$$\left| \frac{e^{\delta_{max}} - 1}{1} \right| = 0.1 \quad (114.)$$

Se  $\delta_{max} > 0$  obtemos:

$$\delta_{max} = 0.0953 \quad (115.)$$

Se  $\delta_{max} < 0$  obtemos:

$$-\delta_{max} = 0.1054 \quad (116.)$$

Em qualquer dos casos podemos tomar:

$$|\delta_{max}| = 0.0953 \quad (117.)$$

ou seja:

$$\frac{\beta \Delta\theta}{P_{25 \rightarrow \tau}} \left| 1 - \frac{P_{25 \rightarrow \tau}}{P_{25 \rightarrow \tau_1}} \right| \leq 0.0953 \quad (118.)$$

ou:

$$\frac{\Delta\theta}{\Delta\theta_{max}} \left| 1 - \frac{P_{25 \rightarrow \tau}}{P_{25 \rightarrow \tau_i}} \right| \leq 0.2538 \quad (119.)$$

Podemos obter uma condição equivalente expressa em variáveis adimensionais. Definamos a seguinte temperatura de pré-aquecimento generalizada:

$$h \equiv \frac{\Delta\theta}{\Delta\theta_{max}} \quad (120.)$$

Pela definição de  $h$ , verifica-se que a aproximação (96.)-(97.) traduz-se simplesmente por (cf. equação (112.)):

$$h \leq 1 \quad (121.)$$

Definamos também a seguinte potência generalizada (cf. equação (107.)):

$$G_i \equiv \frac{P_{25 \rightarrow \tau_i}}{P_{25 \rightarrow \tau}} \quad (122.)$$

Sendo assim, o sistema de inequações (119.) escreve-se agora:

$$\left| 1 - \frac{1}{G_i} \right| \leq \frac{0.2538}{h} \quad (123.)$$

ou:

$$1 - \frac{0.2538}{h} \leq \frac{1}{G_i} \leq 1 + \frac{0.2538}{h} \quad (124.)$$

Na figura 4.1A estão representadas as funções:

$$\frac{1}{G_i} = 1 \pm \frac{0.2538}{h} \quad (125.)$$

em todo o seu domínio, ao passo que na figura 4.1B representam-se as mesmas funções para  $h > 0.2$ , que é a região do domínio de maior interesse.

Tais figuras sugerem o uso do seguinte método:

1. Determinar o valor de  $\Delta\theta_{max}$  (equação (112.)) para o material em causa e para o caso padrão escolhido.

2. Verificar se o ponto representativo do pré-aquecimento e da potência pretendidos se situa na região do diagrama em que ambas as condições (121.) e (124.) são satisfeitas: o domínio plano limitado pelas duas curvas e pelas rectas  $h = 0$ ,  $h = 1$  e  $1/G_i = 0$ .

3. Se isso acontecer, o valor da potência pretendido é, simplesmente (cf. equação (107.)):

$$P_{\theta \rightarrow \tau_i} = P_{\theta \rightarrow \tau} G_i \quad (126.)$$

Alternativamente, podemos fazer o seguinte:

1. Determinar o valor de  $\Delta\theta_{max}$  (equação (112.)) para o material em causa e para o caso padrão escolhido (identicamente ao caso anterior).

2. Verificar se as seguintes condições são satisfeitas:

$$h \leq 1 \quad (121.)$$

$$\frac{1}{1 + \frac{0.2538}{h}} \leq G_i \leq \frac{1}{1 - \frac{0.2538}{h}} \quad (127.)$$

(cf. equação (124.)).

3. Se o valor da potência generalizada satisfizer a condição anterior, então o valor da potência pretendido é, simplesmente (cf. equação (107.)):

$$P_{\theta \rightarrow \tau_i} = P_{\theta \rightarrow \tau} G_i \quad (126.) .$$

## Potência generalizada vs. temperatura de pré-aquecimento gen.

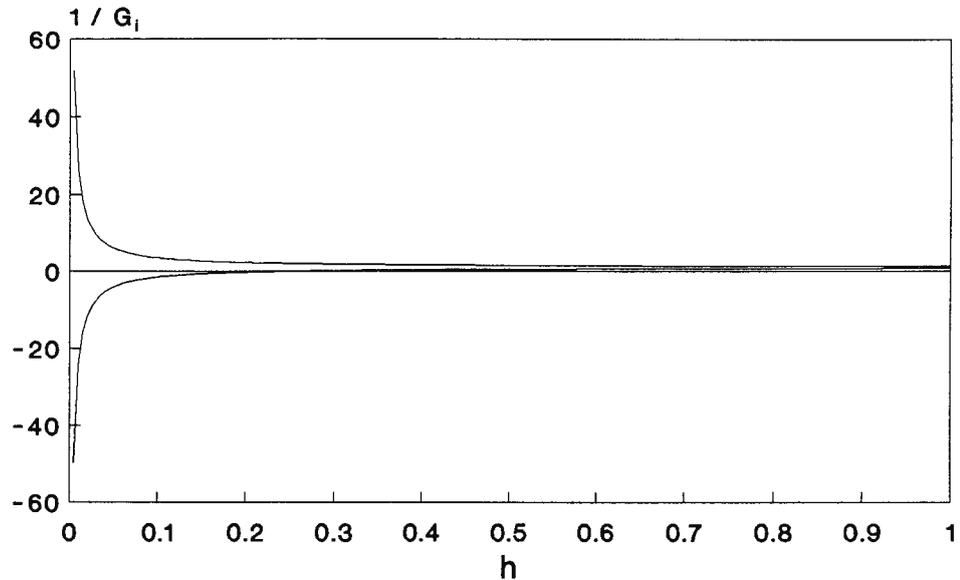


FIGURA 4.1 (A)

## Potência generalizada vs. temperatura de pré-aquecimento gen.

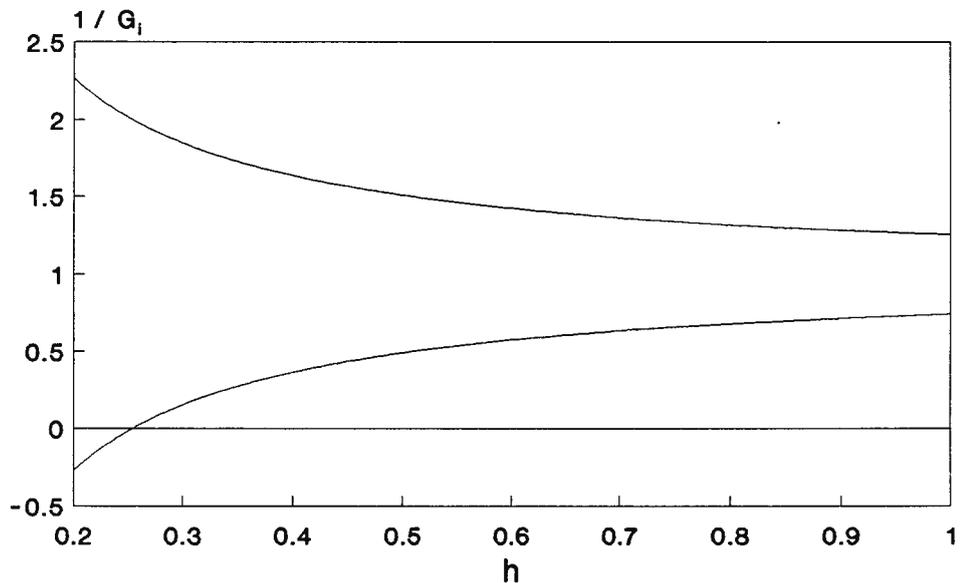


FIGURA 4.1 (B)

### 4.3 Cálculos

Vamos agora ilustrar a aplicação do método delineado na secção anterior através de um exemplo concreto. Consideremos uma amostra de um ferro fundido com um teor de Carbono igual a 3.2%, tratada a partir da temperatura ambiente por um laser de CO<sub>2</sub> de potência:

$$P_{25 \rightarrow \tau} = 1.000 \text{ kW}$$

com velocidade de varrimento em relação à superfície da amostra:

$$v = 5.0 \cdot 10^{-3} \text{ m s}^{-1}$$

Usando os valores das propriedades físicas [20, 21]:

$$K = 74.4 \text{ W m}^{-1} \text{ K}^{-1}$$

$$D = 2.09 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$$

$$A = 0.05$$

e para uma profundidade:

$$z = 1.0 \cdot 10^{-4} \text{ m}$$

podemos calcular o parâmetro  $\beta$ :

$$\beta = 0.946 \text{ W K}^{-1}$$

donde obtemos o valor máximo da temperatura de pré-aquecimento a usar no âmbito deste modelo,  $\theta_{max}$ :

$$\Delta\theta_{max} = 397 \text{ K}$$

logo:

$$\theta_{max} = 422 \text{ }^\circ\text{C}$$

Suponhamos que se pretende usar uma temperatura inicial de 325 °C. Assim o valor que se obtém para a temperatura de pré-aquecimento adimensionalizada é:

$$h = 0.756$$

o que permite calcular a gama de potências que podem ser empregues:

$$0.749 \leq G_i \leq 1.505$$

ou seja:

$$0.749 \text{ kW} \leq P_{25 \rightarrow \tau_i} \leq 1.505 \text{ kW}$$

Queremos agora determinar que valor da potência empregar para, com este pré-aquecimento, reproduzir o resultado obtido usando uma potência  $P_{25 \rightarrow \tau_i} = 1.300 \text{ kW}$ . Em primeiro lugar, calculamos o respectivo valor para o caso padrão:

$$P_{325 \rightarrow \tau} = P_{25 \rightarrow \tau} - \beta (325 - 25) = 0.716 \text{ kW}$$

donde resulta (sendo que  $G_i = 1.3$ ):

$$P_{325 \rightarrow \tau_i} = P_{325 \rightarrow \tau} G_i = 0.931 \text{ kW}.$$

#### **4.4 Conclusões**

1. Usou-se o modelo de fonte pontual móvel para obter uma expressão que correlaciona as potências necessárias para obter a mesma temperatura à mesma profundidade de um certo material irradiado por laser, empregando diferentes temperaturas iniciais.

2. Em certas condições mostrou-se que tal expressão pode ser colocada numa forma exponencial. Em condições ainda mais restritivas, verificou-se ainda que se pode obter uma relação de proporcionalidade directa entre valores de potência que conduzem à obtenção de temperaturas diferentes à mesma profundidade no material, relação essa que é independente dos valores particulares de tais temperaturas.

3. Essa relação foi usada como base dum método de estimar potências ao usar pré-aquecimento, tendo como critério obter o mesmo valor da temperatura a uma certa profundidade, relativamente à situação em que tal pré-aquecimento não foi usado.

4. Foram apresentados critérios quantitativos para decidir da aplicabilidade das aproximações feitas, quer de uma forma analítica, quer duma forma gráfica.

## 5. Soluções da equação de Fourier em materiais irradiados por laser: síntese

Depois de termos abordado com algum pormenor algumas soluções da equação de condução do calor para materiais irradiados por laser, iremos agora descrever, de forma sucinta e sistemática, outras soluções de tal equação tendo por base o trabalho de Carslaw e Jaeger [4]. Assim, seguimos a estrutura básica do seu livro\*, em que cada solução é caracterizada pela forma concreta assumida pela equação de Fourier, pelo domínio em que ela é integrada e pelas condições iniciais e fronteira que lhe são impostas, o que aliás, do ponto de vista matemático, conduz à definição completa do problema.

Fizemos assim uma análise detalhada de tais soluções, recolhendo\*\* aquelas cujas condições fronteira ou cujo termo-fonte se adequasse a casos concretos de irradiação de materiais por feixes laser, tendo o cuidado de identificar como os parâmetros do feixe e da interacção se podem integrar nessas mesmas soluções. No entanto, apresentamos aqui as mais simples, o que julgamos ser o procedimento mais adequado a um trabalho desta índole. Contudo, pretende-se que seja um desenvolvimento futuro realizar uma descrição mais detalhada que inclua não somente o trabalho de Carslaw e Jaeger de uma forma mais completa mas também a vasta bibliografia já publicada nesta área\*\*\* .

---

\* Além disso, mantivemos também a prática de referir explicitamente em cada subcapítulo a definição completa do problema, o que acarreta necessariamente o aparecimento de algumas repetições. No entanto, tal procedimento é vantajoso, na medida em que cada subcapítulo pode ser assim consultado separadamente.

\*\* O facto de se mencionar na Bibliografia do presente trabalho, caso a caso, qual a página de "*Conduction of Heat in Solids*" onde pode ser encontrada a respectiva solução, tem por objectivo facilitar uma eventual consulta.

\*\*\* Aliás, alguma bibliografia adicional é já incluída do presente trabalho. No entanto, é de notar que muitos dos resultados aí contidos se baseiam directamente no trabalho de Carslaw e Jaeger.

### 5.1 Caso unidimensional, domínio semi-infinito, sem geração de calor

*Equação de Fourier:*

$$\frac{\partial T}{\partial t} = D \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad (128.)$$

*Geometria semi-infinita:*

$$x \geq 0 \quad (129.)$$

*Condição fronteira de fluxo imposto:*

$$f = -K \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=0} = f(t) \quad (130.)$$

No caso de uma irradiação por um laser,  $f$  é dado por:

$$f(t) = A I(t) \quad (131.)$$

em que  $A$  é o coeficiente de absorção e  $I$  é a densidade de potência, que em geral varia no tempo.

*Condição inicial:*

$$T(x, t = 0) = 0 \quad (132.)$$

#### 5.1.1 Solução geral

Obtém-se [6]:

$$T(x, t) = \frac{1}{K} \sqrt{\frac{D}{\pi}} \int_0^t \frac{f(t-\tau)}{\sqrt{\tau}} e^{-\frac{x^2}{4D\tau}} d\tau \quad (133.)$$

### 5.1.2 Fluxo constante

Tomemos a seguinte forma para  $f(t)$ :

$$f(t) = \begin{cases} f_o & (t < t_i) \\ 0 & (t > t_i) \end{cases} \quad (134.)$$

(com  $f_o$  constante). No caso de um feixe laser, diz-se que se trata de um impulso de duração  $t_i$ .

A solução é:

Para  $t < t_i$ :

$$T(x,t) = \frac{2f_o}{K} \sqrt{Dt} \operatorname{ierfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{Dt}}\right) \equiv T_{1D}(x,t) \quad (135.)$$

Definimos aqui  $T_{1D}$ , a que nos referiremos como sendo a solução fundamental. Tal definição resulta do facto de, como veremos adiante, várias outras soluções poderem ser escritas com base em  $T_{1D}$ .

Para  $t > t_i$ :

$$T(x,t) = \frac{2f_o}{K} \sqrt{D} \left[ \sqrt{t} \operatorname{ierfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{Dt}}\right) - \sqrt{t-t_i} \operatorname{ierfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{D(t-t_i)}}\right) \right] \quad (136.)$$

ou ainda, usando a solução fundamental:

$$T(x,t) = T_{1D}(x,t) - T_{1D}(x,t-t_i) \quad (137.)$$

Estas expressões podem ser usadas mesmo que [ 3,18]:

a) a geometria não seja semi-infinita, desde que :

$$l \gg 2\sqrt{Dt} \quad (138.)$$

em que  $l$  é a espessura do material, não sendo necessário neste caso impor aí condições (cf. secção 5.2.1);

b) a deposição de energia não seja feita à superfície, mas no interior do material, desde que:

$$\frac{l}{\beta} \ll \sqrt{Dt_i} \quad (139.)$$

em que  $\beta$  é o coeficiente de absorção linear (cf. secção 5.3.2).

## 5.2 Caso unidimensional, domínio finito, sem geração de calor, fluxo constante numa face.

*Equação de Fourier:*

$$\frac{\partial T}{\partial t} = D \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad (140.)$$

*Geometria finita:*

$$0 \leq x \leq l \quad (141.)$$

*Condição inicial:*

$$T(x, t = 0) = 0 \quad (142.)$$

*Condições fronteira:*

Vamos apresentar diferentes casos, nos quais para uma face iremos ter uma condição de fluxo imposto, associada ao feixe laser:

$$f^0 = -K \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=0} = f_o = A I \quad (143.)$$

e na outra face uma de três situações distintas.

### 5.2.1 Fluxo nulo na face oposta

*Condição fronteira de fluxo imposto:*

$$f^l = -K \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=l} = 0 \quad (144.)$$

A solução é [22]:

$$T(x,t) = \frac{2 f_o}{K} \sqrt{Dt} \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \operatorname{ierfc} \left( \frac{2nl + x}{2\sqrt{Dt}} \right) + \operatorname{ierfc} \left( \frac{2nl + 2l - x}{2\sqrt{Dt}} \right) \right] \quad (145.)$$

ou seja:

$$T(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[ T_{1D}(2nl + x, t) + T_{1D}(2nl + 2l - x, t) \right] \quad (146.)$$

É interessante notar que:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} T(x,t) = T_{1D}(x,t) \quad (147.)$$

o que nos permite justificar a condição (138.).

### 5.2.2 Temperatura nula na face oposta

*Condição fronteira de temperatura imposta:*

$$T(x=l, t) = 0 \quad (148.)$$

A solução é [22]:

$$T(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n [T_{1D}(2nl+x, t) - T_{1D}(2nl+2l-x, t)] \quad (149.)$$

### 5.2.3 Radiação para um meio a temperatura nula na face oposta

*Condição fronteira de radiação\* para um meio a temperatura nula:*

$$\left[ \frac{\partial T}{\partial x} + hT \right]_{x=l} = 0 \quad (150.)$$

em que  $h$  é o coeficiente de transferência de calor da superfície.

A solução é [23]:

$$T(x,t) = \frac{1 f_o}{K \lambda} \left[ 1 + \lambda \left( 1 - \frac{x}{l} \right) - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \lambda (\alpha_n^2 + \lambda^2) \cos\left(\alpha_n \frac{x}{l}\right)}{\alpha_n^2 (\lambda + \lambda^2 + \alpha_n^2)} e^{-\alpha_n^2 \tau} \right] \quad (151.)$$

em que:

$$\lambda = lh \quad (152.)$$

$$\tau = \frac{D t}{l^2} \quad (153.)$$

e  $\alpha_n$  são as raízes positivas de:

$$\alpha \operatorname{tg}(\alpha) = \lambda \quad (154.)$$

---

\* Estamos a usar a terminologia de Carslaw e Jaeger.

### 5.3 Caso unidimensional, domínio semi-infinito, com geração de calor

*Equação de Fourier:*

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - \frac{1}{D} \frac{\partial T}{\partial t} = - \frac{F(x,t)}{K} \quad (155.)$$

*Geometria semi-infinita:*

$$x \geq 0 \quad (156.)$$

*Condição inicial:*

$$T(x, t = 0) = 0 \quad (157.)$$

*Condições fronteira de fluxo imposto:*

$$f = -K \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=0} = 0 \quad (158.)$$

#### 5.3.1 Termo fonte constante

Tomemos a seguinte forma para  $F$ :

$$F(x,t) = F(x) = \begin{cases} F_0 & (x < l) \\ 0 & (x > l) \end{cases} \quad (159.)$$

em que  $F_0$  é uma constante. Para o caso de uma irradiação por laser temos:

$$F_0 = \frac{A I}{\delta} \quad (160.)$$

em que  $\delta$  é a espessura de absorção.

A solução é [24]:

*Para  $x < l$ :*

$$T(x,t) = \frac{F_o D t}{K} \left[ 1 - 2 i^2 \operatorname{erfc} \left( \frac{l-x}{2\sqrt{Dt}} \right) - 2 i^2 \operatorname{erfc} \left( \frac{l+x}{2\sqrt{Dt}} \right) \right] \quad (161.)$$

Para  $x > l$ :

$$T(x,t) = \frac{2 F_o D t}{K} \left[ i^2 \operatorname{erfc} \left( \frac{l-x}{2\sqrt{Dt}} \right) - i^2 \operatorname{erfc} \left( \frac{l+x}{2\sqrt{Dt}} \right) \right] \quad (162.)$$

em que  $i^n \operatorname{erfc}$  é definida por\*:

$$i^n \operatorname{erfc}(x) \equiv \int_x^\infty i^{n-1} \operatorname{erfc}(\xi) d\xi \quad , n=1,2,\dots \quad (163.)$$

sendo:

$$i^0 \operatorname{erfc}(x) \equiv \operatorname{erfc}(x) \quad (164.)$$

### 5.3.2 Termo fonte variável

Vamos considerar apenas a situação em que o termo fonte é constante no tempo e decai exponencialmente no espaço:

$$F(x,t) = F(x) = f_o \beta e^{-\beta x} \quad (165.)$$

em que  $f_o$  é constante. No caso de uma irradiação por laser, temos:

$$f_o = A I \quad (166.)$$

A solução é [3]:

---

\* Neste caso é  $n = 2$ .

$$\begin{aligned}
T(x,t) = & \frac{2f_o}{K} \sqrt{Dt} \operatorname{ierfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{Dt}}\right) - \frac{f_o}{\beta K} e^{-\beta x} + \\
& + \frac{f_o}{2\beta K} e^{\beta^2 Dt - \beta x} \operatorname{erfc}\left(\beta\sqrt{Dt} - \frac{x}{2\sqrt{Dt}}\right) + \\
& + \frac{f_o}{2\beta K} e^{\beta^2 Dt + \beta x} \operatorname{erfc}\left(\beta\sqrt{Dt} + \frac{x}{2\sqrt{Dt}}\right)
\end{aligned} \quad (167.)$$

É interessante notar que:

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} T(x,t) = T_{1D}(x,t) \quad (168.)$$

o que permite justificar a condição (139.).

#### 5.4 Fontes instantâneas

Nesta secção consideramos as soluções da equação de Fourier associadas a fontes instantâneas, i.e., nas quais se considera que se dá a libertação de uma quantidade finita de calor:

- a) instantaneamente (em  $t = 0$ ) e
- b) numa região determinada do material, de dimensão inferior a 3, seja num ponto (fonte pontual), numa linha (fonte linear), num plano (fonte plana), etc..

Tais soluções podem ser adoptadas para o cálculo do campo de temperatura em materiais tratados com um laser pulsado, para instantes posteriores ao do final da irradiação, desde que [18]:

$$2\sqrt{Dt_i} \ll r_o \quad (169.)$$

em que  $t_i$  é a duração do impulso e  $r_o$  é o raio do feixe.

O problema pode ser posto nos seguintes termos:

*Equação de Fourier:*

$$\frac{\partial T}{\partial t} = D \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) \quad (170.)$$

*Geometria semi-infinita:*

$$z \geq 0 \quad (171.)$$

*Condição fronteira de fluxo imposto:*

$$f = -K \left. \frac{\partial T}{\partial z} \right|_{z=0} = 0 \quad (172.)$$

*Condição inicial:*

$$T(x, y, z, t = 0) = 0 \quad (173.)$$

(condição válida para todos os pontos que não pertençam ao domínio da fonte).

#### 5.4.1 Fonte pontual

*Libertação de uma quantidade de calor  $q_0$  no ponto  $(0,0,0)$ :*

A solução é [25]:

$$T(x, y, z, t) = \frac{q_0}{4 \rho c_p \sqrt{(\pi D t)^3}} e^{-\frac{r^2}{4Dt}} \quad (174.)$$

em que:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad (175.)$$

No caso de um feixe laser,  $q_0$  é dado por:

$$q_0 = A P t_i \quad (176.)$$

### 5.4.2 Fonte plana

*Libertação de uma quantidade de calor  $q_2$  por unidade de área no plano XOY:*

A solução é [18, 26]:

$$T(z, t) = \frac{q_2}{\rho c_p \sqrt{\pi D t}} e^{-\frac{z^2}{4Dt}} \quad (177.)$$

No caso de um feixe laser,  $q_2$  é dado por:

$$q_2 = A I t_i \quad (178.)$$

### 5.4.3 Fonte circular

*Libertação de uma quantidade de calor  $q_c$  por unidade de área no círculo de raio  $r_0$ , contido no plano XOY e centrado na origem:*

A solução é [27]:

$$T(x, y, z, t) = \frac{q_c r_0}{\rho c_p \sqrt{\pi D t}} e^{-\frac{z^2}{4Dt}} \int_0^{\infty} e^{-Dt\lambda^2} J_0(\lambda r) J_1(\lambda r_0) d\lambda \quad (179.)$$

em que  $J_0$  e  $J_1$  são funções de Bessel de primeira espécie.

No caso de um feixe laser,  $q_c$  é dado por:

$$q_c = \frac{AP t_i}{\pi r_o^2} \quad (180.)$$

Para o eixo  $OZ$  obtém-se uma expressão simples:

$$T(0,0,z,t) = \frac{q_c}{\rho c_p \sqrt{\pi Dt}} e^{-\frac{z^2}{4Dt}} \left( 1 - e^{-\frac{r_o^2}{4Dt}} \right) \quad (181.)$$

#### 5.4.4 Fonte gaussiana

Consideremos um feixe laser gaussiano, i.e., cujo perfil de densidade de potência no plano  $XOY$  é dado por:

$$I = I_{max} e^{-\frac{r^2}{r_o'^2}} = I_{max} e^{-2\frac{r^2}{r_o^2}} \quad (182.)$$

em que  $I_{max}$  é a densidade de potência no eixo de revolução do feixe,  $r_o$  é o raio do feixe definido a  $I/e$  (i.e., é o valor de  $r$  tal que a densidade de potência nesse ponto vale  $I/e$  do seu valor na origem) e  $r_o'$  é o raio do feixe a  $I/e^2$ . A relação entre essas duas medidas do raio dum feixe gaussiano é simplesmente:

$$r_o' = \sqrt{2} r_o \quad (183.)$$

Considere-se o problema duma fonte gaussiana instantânea:

*Libertação de uma quantidade de calor  $q_g e^{-\frac{r^2}{r_o^2}}$  por unidade de área no plano  $XOY$ :*

A solução é [18, 3]:

$$T(r, z, t) = \frac{q_g r_o^2}{\rho c_p \sqrt{\pi D t} (4 D t + r_o^2)} e^{-\frac{z^2}{4 D t} - \frac{r^2}{4 D t + r_o^2}} \quad (184.)$$

No caso de um feixe laser,  $q_g$  é dado por:

$$q_g = A I_{max} t_i \quad (185.)$$

Podemos rescrever esta solução usando variáveis adimensionais:

$$\Theta_i(\omega, \zeta, \nu) = \frac{I}{\sqrt{\nu} (\nu + 1)} e^{-\frac{\zeta^2}{\nu} - \frac{\omega^2}{\nu + 1}} \quad (186.)$$

em que:

$$\Theta_i = \frac{r_o \rho c_p \sqrt{\pi}}{2 q_g} T \quad (187.)$$

$$\nu = \frac{4 D t}{r_o^2} \quad (188.)$$

$$\omega = \frac{r}{r_o} \quad (189.)$$

$$\zeta = \frac{z}{r_o} \quad (190.)$$

### 5.5 Fontes contínuas

Interessa-nos considerar agora as soluções para os 4 tipos de fontes apresentados na secção anterior para os casos em que a condição:

$$2\sqrt{Dt_i} \ll r_o \quad (169.)$$

não é satisfeita. Nesse caso falamos de fontes contínuas, nas quais se especifica a quantidade de calor depositada por unidade de tempo, deposição essa feita desde o instante inicial ( $t = 0$ ) até ao instante desejado  $t$ . Tais soluções são obtidas através de integração na variável temporal.

O problema pode ser posto nos seguintes termos:

*Equação de Fourier:*

$$\frac{\partial T}{\partial t} = D \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) \quad (191.)$$

*Geometria semi-infinita:*

$$z \geq 0 \quad (192.)$$

*Condição fronteira de fluxo imposto:*

$$f = -K \left. \frac{\partial T}{\partial z} \right|_{z=0} = 0 \quad (193.)$$

*Condição inicial:*

$$T(x, y, z, t = 0) = 0 \quad (194.)$$

(condição válida para todos os pontos que não pertençam ao domínio da fonte).

### 5.5.1 Fonte pontual

*Libertação de uma quantidade de calor  $q_o'(t)$  por unidade de tempo no ponto  $(0,0,0)$ :*

A solução é [28]:

$$T(x, y, z, t) = \frac{1}{4 \rho c_p \sqrt{(\pi D)^3}} \int_0^t q_o'(t') e^{-\frac{r^2}{4D(t-t')}} \frac{dt'}{\sqrt{(t-t')^3}} \quad (195.)$$

em que:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad (196.)$$

No caso de um feixe laser,  $q_o'(t)$  é dado por:

$$q_o'(t) = A P(t) \quad (197.)$$

Se for:

$$q_o'(t) = q_o' \quad (\text{cte}) \quad (198.)$$

obtém-se:

$$T(x, y, z, t) = \frac{q_o'}{2 \pi K r} \operatorname{erfc}\left(\frac{r}{2\sqrt{Dt}}\right) \quad (199.)$$

### 5.5.2 Fonte plana

*Libertação de uma quantidade de calor  $q_2'(t)$  por unidade de tempo e por unidade de área no plano XOY:*

A solução é [29]:

$$T(z, t) = \frac{1}{\rho c_p \sqrt{\pi D}} \int_0^t q_2'(t') e^{-\frac{z^2}{4D(t-t')}} \frac{dt'}{\sqrt{t-t'}} \quad (200.)$$

(cf. secção 5.1).

No caso de um feixe laser,  $q_2'(t)$  é dado por:

$$q_2'(t) = AI(t) \quad (201.)$$

Se for:

$$q_2'(t) = q_2' (c^{te}) \quad (202.)$$

obtem-se:

$$T(z,t) = \frac{2 q_2'}{\rho c_p} \sqrt{\frac{t}{\pi D}} e^{-\frac{z^2}{4Dt}} - \frac{q_2' z}{K} \operatorname{erfc}\left(\frac{z}{2\sqrt{Dt}}\right) \quad (203.)$$

Atendendo a que [30]:

$$\operatorname{ierfc}(u) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-u^2} - u \operatorname{erfc}(u) \quad (204.)$$

obtemos finalmente:

$$T(z,t) = \frac{2 q_2'}{K} \sqrt{Dt} \operatorname{ierfc}\left(\frac{z}{2\sqrt{Dt}}\right) \quad (205.)$$

### 5.5.3 Fonte circular

*Libertação de uma quantidade de calor  $q_c'$  por unidade de tempo e por unidade de área no círculo de raio  $r_0$ , contido no plano  $XOY$  e centrado na origem:*

A solução é [18, 31]:

$$T(r, z, t) = \frac{q_c' r_o}{2K} \int_0^{\infty} J_0(\lambda r) J_1(\lambda r_o) \left[ e^{-\lambda z} \operatorname{erfc}\left(\frac{z}{2\sqrt{Dt}} - \lambda\sqrt{Dt}\right) - e^{\lambda z} \operatorname{erfc}\left(\frac{z}{2\sqrt{Dt}} + \lambda\sqrt{Dt}\right) \right] \frac{d\lambda}{\lambda} \quad (206.)$$

em que  $J_0$  e  $J_1$  são funções de Bessel de primeira espécie.

No caso de um feixe laser,  $q_c'$  é dado por:

$$q_c' = \frac{AP}{\pi r_o^2} \quad (207.)$$

Para o eixo  $OZ$  obtém-se uma expressão simples:

$$T(0, z, t) = \frac{2q_c'}{K} \sqrt{Dt} \left( \operatorname{ierfc}\left(\frac{z}{2\sqrt{Dt}}\right) - \operatorname{ierfc}\left(\frac{\sqrt{z^2 + r_o^2}}{2\sqrt{Dt}}\right) \right) \quad (208.)$$

ou seja:

$$T(0, z, t) = T_{1D}(z, t) - T_{1D}(\sqrt{z^2 + r_o^2}, t) \quad (209.)$$

Notamos ainda que, se o raio do feixe (uniforme, neste caso) for muito maior que a distância típica "percorrida" pelo calor:

$$r_o \gg 2\sqrt{Dt} \quad (210.)$$

se obtém muito aproximadamente a expressão para o caso unidimensional simples:

$$T(0, z, t) \cong T_{1D}(z, t) \quad (211.)$$

### 5.5.4 Fonte gaussiana

Libertação de uma quantidade de calor  $q_g'(t)$  e  $\frac{r^2}{r_o^2}$  por unidade de tempo e por unidade de área no plano XOY:

A solução é [18, 3]:

$$T(r, z, t) = \frac{r_o^2}{K} \sqrt{\frac{D}{\pi}} \int_0^t q_g'(t-t') e^{-\frac{z^2}{4Dt'} - \frac{r^2}{4Dt'+r_o^2}} \frac{dt'}{\sqrt{t'} (4Dt'+r_o^2)} \quad (212.)$$

No caso de um feixe laser,  $q_g'$  é dado por:

$$q_g'(t) = AI_{max}(t) \quad (213.)$$

Podemos rescrever esta solução usando variáveis adimensionais:

$$\Theta_c(\omega, \zeta, \nu) = \int_0^\nu \frac{p(\nu-\nu') d\nu'}{\sqrt{\nu'} (\nu'+1)} e^{-\frac{\zeta^2}{\nu'} - \frac{\omega^2}{\nu'+1}} \quad (214.)$$

em que:

$$p(t) = \frac{q_g'(t)}{Q_g'} \quad (215.)$$

é a função associada ao perfil temporal da fonte, sendo  $Q_g'$  o valor máximo de  $q_g'$ ; além disso:

$$\Theta_c = \frac{2K\sqrt{\pi}}{r_o Q_g'} T \quad (216.)$$

$$v = \frac{4Dt}{r_o^2} \quad (188.)$$

$$\omega = \frac{r}{r_o} \quad (189.)$$

$$\zeta = \frac{z}{r_o} \quad (190.)$$

Na origem do sistema de coordenadas podemos escrever:

$$\Theta_c(\theta, \theta, v) = \int_0^v \frac{p(v-v') dv'}{\sqrt{v'}(v'+1)} \quad (217.)$$

Se se puder considerar que:

$$p(t) = 1, \quad \forall t \quad (218.)$$

então:

$$\Theta_c(\theta, \theta, v) = 2 \operatorname{arctg}(\sqrt{v}) \quad (219.)$$

ou seja:

$$T(\theta, \theta, t) = \frac{r_o Q_s'}{K \sqrt{\pi}} \operatorname{arctg} \left( \sqrt{\frac{4Dt}{r_o^2}} \right) \quad (220.)$$

Mais uma vez notamos que, se o raio do feixe (gaussiano, neste caso) for muito maior que a distância típica "percorrida" pelo calor:

$$r_o \gg 2\sqrt{Dt} \quad (210.)$$

se obtém muito aproximadamente, para a origem do sistema de coordenadas, a expressão para o caso unidimensional simples:

$$T(0,0,t) \equiv \frac{2 Q_s'}{K} \sqrt{\frac{Dt}{\pi}} = T_{1D}(0,t) \quad (221.)$$

### 5.6 Fontes em domínios de espessura fina

Consideraremos agora alguns tipos de fonte apresentados na secção anterior, mas neste caso em domínios de espessura muito fina, i.e., em meios em que a temperatura é independente da variável de profundidade,  $z$ . Isso acontecerá desde que se verifique a condição:

$$l \ll 2\sqrt{Dt} \quad (222.)$$

em que  $l$  é a espessura.

Visto que neste caso a maior parte do material se situa junto à superfície, é conveniente incluir as perdas de calor que aí se dão. Neste caso, consideraremos apenas que a extracção de calor se dá apenas por radiação (para um meio a temperatura nula).

O problema pode ser posto nos seguintes termos:

*Equação de Fourier:*

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = \frac{1}{D} \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{2h}{l} T \quad (223.)$$

sendo  $h$  o coeficiente de transferência de calor da superfície.

*Condição inicial:*

$$T(x, y, t = 0) = 0 \quad (224.)$$

(condição válida para todos os pontos que não pertençam ao domínio da fonte).

*Geometria finita:*

$$0 \leq z \leq l \quad (225.)$$

*Condições fronteira de fluxo imposto em ambas as faces:*

$$-K \left. \frac{\partial T}{\partial z} \right|_{z=0,l} = 0 \quad (226.)$$

### 5.6.1 Fonte pontual instantânea

*Libertação de uma quantidade de calor  $q_0$  no ponto  $(0,0,0)$ :*

A solução é [3, 32]:

$$T(x, y, t) = \frac{q_0}{4 \pi K l t} e^{-\frac{r^2}{4Dt} - D\gamma^2 t} \quad (227.)$$

em que:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad (228.)$$

e:

$$\gamma^2 = \frac{2h}{l} \quad (229.)$$

No caso de um feixe laser,  $q_0$  é dado por:

$$q_0 = A P t_i \quad (230.)$$

### 5.6.2 Fonte gaussiana instantânea

Libertação de uma quantidade de calor  $q_g$  e  $\frac{r^2}{r_o^2}$  por unidade de área no plano XOY:

A solução é [3]:

$$T(r,t) = \frac{q_g}{4Klt \left( \frac{1}{r_o^2} + \frac{1}{4Dt} \right)} e^{-D\gamma^2 t - \frac{r^2}{4Dt + r_o^2} + \frac{\left(\frac{r}{4Dt}\right)^2}{\frac{1}{r_o^2} + \frac{1}{4Dt}}} \quad (231.)$$

No caso de um feixe laser,  $q_g$  é dado por:

$$q_g = A I_{max} t_i \quad (232.)$$

### 5.6.3 Fonte gaussiana contínua

Libertação de uma quantidade de calor  $q_g'(t)$  e  $\frac{r^2}{r_o^2}$  por unidade de tempo e por unidade de área no plano XOY:

A solução é [3]:

$$T(r,t) = \frac{q_g' D r_o^2}{K l} \int_0^t e^{-D\gamma^2 t' - \frac{r^2}{4Dt'} + \frac{r^2 r_o^2}{4Dt'(r_o^2 + 4Dt')}} \frac{dt'}{(4Dt' + r_o^2)} \quad (233.)$$

No caso de um feixe laser,  $q_g'$  é dado por:

$$q_g' = A I_{max} \quad (234.)$$

Podemos rescrever esta solução usando variáveis adimensionais:

$$\Psi(\omega, \nu) = \int_0^\nu \frac{d\nu'}{\nu'+1} e^{-\sigma\nu' - \frac{\omega^2}{\nu'+1}} \quad (235.)$$

em que:

$$\Psi = \frac{4 K l}{r_o^2 Q_g} T \quad (236.)$$

$$\nu = \frac{4 D t}{r_o^2} \quad (188.)$$

$$\omega = \frac{r}{r_o} \quad (189.)$$

$$\sigma = \left( \frac{\gamma r_o}{2} \right)^2 \quad (237.)$$

## 5.7 Fontes móveis

Consideraremos agora algumas expressões válidas para a situação em que um feixe laser se move com velocidade de módulo  $\nu$  em relação à superfície do material que está a ser irradiado.

### 5.7.1 Fonte pontual (formulação de Rosenthal)

*Equação de Fourier:*

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = \frac{1}{D} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (238.)$$

Visto termos uma *fonte de calor de potência  $q_0'$*  a mover-se com *velocidade  $v$*  segundo o eixo  *$OX$* , é conveniente operar a seguinte mudança de variável:

$$\xi \equiv x - vt \quad (239.)$$

Considerando instantes em que já se tenha atingido o estado quase estacionário:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = 0 \quad (240.)$$

a equação de Fourier escreve-se agora:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = - \frac{v}{D} \frac{\partial T}{\partial \xi} \quad (241.)$$

situando-se agora a fonte permanentemente na origem do novo sistema de coordenadas.

*Geometria semi-infinita:*

$$z \geq 0 \quad (242.)$$

*Condições fronteira de fluxo imposto:*

$$-K \left. \frac{\partial T}{\partial z} \right|_{z=+\infty} = -K \left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_{y=\pm\infty} = -K \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=\pm\infty} = 0 \quad (243.)$$

e:

$$-K \left. \frac{\partial T}{\partial z} \right|_{z=0} = 0 \quad (244.)$$

excepto em:

$$\lim_{R \rightarrow 0} \left( -2\pi R^2 K \frac{\partial T}{\partial R} \right) = q_0' \quad (245.)$$

em que:

$$R = \sqrt{\xi^2 + y^2 + z^2} \quad (246.)$$

*Condição inicial:*

$$T(x, y, z, t = 0) = 0 \quad (247.)$$

A solução é [13]:

$$T(\xi, r) = \frac{q_0'}{2\pi K R} e^{-\frac{v}{2D}(R+\xi)} \quad (248.)$$

No caso de um feixe laser,  $q_0'$  é dado por:

$$q_0' = AP \quad (249.)$$

### 5.7.2 Fonte pontual (formulação de Carslaw e Jaeger)

À semelhança da fonte pontual contínua da secção 5.5.1, considera-se nesta formulação que se dá uma *libertação da quantidade de calor*  $q_0'$  *por unidade de tempo, na origem do sistema de coordenadas* e que, além disso, *o meio material se move com velocidade*  $v$ , *segundo o eixo*  $OX$ . Nesta formulação é feita uma integração adequada do resultado correspondente à fonte pontual instantânea (secção 5.4.1).

O problema pode ser posto nos seguintes termos:

*Equação de Fourier:*

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = \frac{1}{D} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (250.)$$

*Geometria semi-infinita:*

$$z \geq 0 \quad (251.)$$

*Condição fronteira de fluxo imposto:*

$$-K \left. \frac{\partial T}{\partial z} \right|_{z=0} = 0 \quad (252.)$$

*Condição inicial:*

$$T(x, y, z, t = 0) = 0 \quad (253.)$$

A solução é [12]:

$$T(x, y, z, t) = \frac{q_0'}{\sqrt{\pi^3} K r} e^{\frac{y \cdot x}{2D}} \int_{\frac{r}{2\sqrt{Dt}}}^{\infty} e^{-\mu^2 - \left(\frac{y r}{4D\mu}\right)^2} d\mu \quad (254.)$$

em que:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad (255.)$$

No caso de um feixe laser,  $q_0'$  é dado por:

$$q_0' = AP \quad (256.)$$

No limite  $t \rightarrow \infty$  obtém-se:

$$T(x, r) = \frac{q_0'}{2\pi K r} e^{-\frac{v}{2D}(r-x)} \quad (257.)$$

que é o resultado obtido na secção anterior, como seria de esperar (note-se que  $\xi = -x$ ).

### 5.7.3 Fonte pontual num domínio finito

*Libertação da quantidade de calor  $q_0'$  por unidade de tempo, na origem do sistema de coordenadas; o meio material move-se com velocidade  $v$ , segundo o eixo  $OX$ .*

*Equação de Fourier:*

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = \frac{1}{D} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (258.)$$

*Geometria finita:*

$$0 \leq z \leq l \quad (259.)$$

*Condições fronteira de fluxo imposto em ambas as faces:*

$$-K \left. \frac{\partial T}{\partial z} \right|_{z=0,l} = 0 \quad (260.)$$

*Condição inicial:*

$$T(x, y, z, t = 0) = 0 \quad (261.)$$

A solução é [33]:

$$T(x, y, z, t) = \frac{q_0'}{4\pi Kl} \int_0^t \left[ 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} e^{-D(t-t') \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2} \cos\left(\frac{n\pi z}{l}\right) \right] e^{-\frac{[x-v(t-t')]^2 + y^2}{4D(t-t')}} \frac{dt'}{t-t'} \quad (262.)$$

No caso de um feixe laser,  $q_0'$  é dado por:

$$q_0' = AP \quad (263.)$$

No limite  $t \rightarrow \infty$  obtém-se:

$$T(z, s) = \frac{q_0'}{2\pi Kl} e^{\frac{vx}{2D}} \left[ K_0\left(\frac{vs}{2D}\right) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} K_0\left[\frac{vs}{2D} \sqrt{1 + \left(\frac{2Dn\pi}{vl}\right)^2}\right] \cos\left(\frac{n\pi z}{l}\right) \right] \quad (264.)$$

em que:

$$s = \sqrt{x^2 + y^2} \quad (265.)$$

e  $K_0$  é uma função modificada de Bessel de segunda espécie.

#### 5.7.4 Fonte pontual num domínio de espessura fina

*Libertação da quantidade de calor  $q_0'$  por unidade de tempo, na origem do sistema de coordenadas; o meio material move-se com velocidade  $v$ , segundo o eixo  $OX$ .*

*Equação de Fourier:*

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = \frac{1}{D} \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{2h}{l} T \quad (266.)$$

sendo  $h$  o coeficiente de transferência de calor da superfície.

*Condição inicial:*

$$T(x, y, t = 0) = 0 \quad (267.)$$

(condição válida para todos os pontos que não pertençam ao domínio da fonte).

*Geometria finita:*

$$0 \leq z \leq l \quad (268.)$$

*Condições fronteira de fluxo imposto em ambas as faces:*

$$-K \left. \frac{\partial T}{\partial z} \right|_{z=0,l} = 0 \quad (269.)$$

A solução é [33]:

$$T(x, y) = \frac{q_0'}{2\pi K l} e^{\frac{yx}{2D}} K_0 \left( \frac{s \sqrt{v^2 + (2D\gamma)^2}}{2D} \right) \quad (270.)$$

em que:

$$s = \sqrt{x^2 + y^2} \quad (271.)$$

e:

$$\gamma^2 = \frac{2h}{l} \quad (229.)$$

No caso de um feixe laser,  $q_0'$  é dado por:

$$q_0' = AP \quad (272.)$$

### 5.7.5. Fonte gaussiana

Consideremos agora que o sistema de eixos está fixo no material e que a fonte de calor, neste caso de perfil gaussiano, se move com velocidade  $v$  segundo o eixo  $OZ$ .

O problema pode ser posto nos seguintes termos:

*Equação de Fourier:*

$$\frac{\partial T}{\partial t} = D \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) + \frac{F}{\rho c_p} \quad (273.)$$

em que o termo fonte assume a forma duma *gaussiana móvel de raio  $r_0$  e de potência  $q_0'$* :

$$F = \frac{q_0'}{\pi r_0^2} e^{-\frac{(x+vt)^2 + y^2}{r_0^2}} \frac{h(z)}{\delta} \quad (274.)$$

em que:

$$h(z) = \begin{cases} 1, & z < \delta \\ 0, & z > \delta \end{cases} \quad (275.)$$

sendo  $\delta$  a espessura de absorção, ou seja, a espessura da camada do material em que se considera que a radiação laser é completamente absorvida.

*Geometria semi-infinita:*

$$z \geq 0 \quad (276.)$$

*Condição fronteira de fluxo imposto:*

$$f = -K \left. \frac{\partial T}{\partial z} \right|_{z=0} = 0 \quad (277.)$$

Condição inicial:

$$T(x, y, z, t = 0) = 0 \quad (278.)$$

A solução para o estado quase estacionário é [14, 18]:

$$T(x, y, z) = \frac{q_0'}{\rho c_p} \int_0^{\infty} e^{-\frac{(x+vt')^2 + y^2}{r_0^2 + 4Dt'} - \frac{z^2}{4Dt'}} \frac{dt'}{\sqrt{\pi^3 Dt'} (r_0^2 + 4Dt')} \quad (279.)$$

No caso de um feixe laser,  $q_0'$  é dado por:

$$q_0' = AP \quad (280.)$$

No limite  $r_0 \rightarrow 0$  obtém-se:

$$T(x, r) = \frac{q_0'}{2\pi Kr} e^{-\frac{v}{2D}(r+x)} \quad (281.)$$

em que:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad (282.)$$

que é o resultado obtido nas secções 5.7.1 e 5.7.2, como seria de esperar.

Pode-se escrever a equação (279.) usando variáveis adimensionais:

$$T(X, Y, Z) = \frac{q_0'}{K r_0} f(X, Y, Z, v) \quad (283.)$$

com:

$$f(X, Y, Z, v) = \int_0^{\infty} e^{-H(u)} \frac{du}{\sqrt{\pi^3} (1 + u^2)} \quad (284.)$$

e:

$$H(u) = \frac{\left(X + \frac{\rho}{2}u^2\right)^2 + Y^2}{2(1+u^2)} + \frac{Z^2}{2u^2} \quad (285.)$$

sendo:

$$u^2 = \frac{4 D t'}{r_o^2} \quad (286.)$$

$$\rho = \frac{r_o v}{\sqrt{2} D} \quad (287.)$$

$$X = \frac{\sqrt{2} x}{r_o} \quad (288.)$$

$$Y = \frac{\sqrt{2} y}{r_o} \quad (289.)$$

$$Z = \frac{\sqrt{2} z}{r_o} \quad (290.)$$

## **6. Conclusões**

1. Salientou-se a importância da determinação do campo de temperatura de materiais irradiados por laser, bem como as vantagens de uma abordagem analítica para a sua determinação.

2. Desenvolveu-se um modelo unidimensional para o cálculo da temperatura de superfície incluindo o efeito da variação do coeficiente de absorção com a temperatura. Intenciona-se desenvolvê-lo futuramente, não somente pelo aprofundamento da abordagem analítica, mas também pelo uso de métodos numéricos, nomeadamente na integração da equação de Abel associada com este problema.

3. Desenvolveu-se um método analítico para o cálculo do volume fundido por unidade de tempo.

4. Desenvolveu-se um método para estimar os valores da potência a usar em condições de pré-aquecimento, conhecendo os seus valores correlativos para os quais a temperatura inicial foi a temperatura ambiente.

5. Apresentou-se uma síntese dos modelos de formulação matemática simples para a determinação do campo de temperatura em materiais irradiados por laser.

6. Em termos de desenvolvimentos futuros, espera-se que o presente trabalho tenha fornecido algumas bases para a elaboração de uma tese de doutoramento na área da Teoria da Solidificação.

## Apêndice 1

Consideremos a resolução da equação de Fourier (1.), com as condições iniciais e fronteira (3.) - (6.). Tomando uma variável temporal adimensional, a equação de Fourier fica:

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} = D^* \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad (291.)$$

$$D^* \equiv D t^* \quad (292.)$$

$$\tau \equiv \frac{t}{t^*} \quad (293.)$$

em que  $D^*$  é uma difusividade térmica generalizada e  $t^*$  é dado pela equação (38.).

Sendo a expressão do fluxo  $f(t)$  dada por:

$$f(T_o(t)) = I_o \alpha \sqrt{T_o + \chi} \quad (294.)$$

obtemos, por similaridade, a equação de Abel a resolver para a determinação da temperatura superficial, nestas condições (cf. equação (22.)):

$$T_o(\tau) = \frac{\alpha E^*}{2} \int_0^\tau \sqrt{\frac{T_o(s) + \chi}{\tau - s}} ds \quad (295.)$$

$$E^* \equiv \frac{2I_o}{k} \sqrt{\frac{D^*}{\pi}} = E \sqrt{t^*} \quad (296.)$$

A solução do problema resolvido no texto principal ( $\chi = 0$ ) sugere que se faça (cf. equação (33.)):

$$\chi = \mu t^* \quad (297.)$$

$$\mu \equiv \left( \frac{\pi \alpha E}{4} \right)^2 \quad (298.)$$

Ao fazer a seguinte mudança de variável:

$$\psi(\tau) = \frac{T_o(\tau)}{\chi} + 1 \quad (299.)$$

obtém-se finalmente a equação de Abel, expressa em variáveis adimensionais:

$$\psi(\tau) - 1 = \frac{2}{\pi} \int_0^\tau \sqrt{\frac{\psi(s)}{\tau - s}} ds \quad (300.)$$

ou seja, temos uma forma adequada para a busca de uma solução numérica. É esse o passo seguinte que se pretende dar na sequência do presente trabalho, em paralelo com desenvolvimentos pela via analítica.

## Apêndice 2

Considerando novamente a expressão que dá a temperatura superficial para um fluxo à superfície dependente do tempo (equação (13.)):

$$T_o(t) = \frac{1}{K} \sqrt{\frac{D}{\pi}} \int_0^t \frac{f(t-\tau)}{\sqrt{\tau}} d\tau \quad (301.)$$

queremos agora considerar o caso em que o fluxo assume a seguinte forma genérica:

$$f(t) = \varepsilon (T_o)^p \quad (302.)$$

com  $\varepsilon$  e  $p$  conhecidos. É de realçar que, consoante o valor de  $p$ , podemos obter condições fronteira usuais:

$p = 1/2$ : problema estudado no texto principal

$p = 1$ : radiação

$p = 4$ : radiação de corpo negro.

Ficamos assim com a seguinte equação de Abel:

$$T_o(t) = \eta \int_0^t \frac{T_o^p(s)}{\sqrt{t-s}} ds \quad (303.)$$

$$\eta \equiv \frac{\varepsilon}{K} \sqrt{\frac{D}{\pi}} \quad (304.)$$

que pode ser rescrita na seguinte forma:

$$T_o(t) = \eta \sqrt{t} \int_0^1 \frac{(T_o[t(1-\theta)])^p}{\sqrt{\theta}} d\theta \quad (305.)$$

Fazendo (cf. equação (29.)):

$$T_o(t) = \mu t^q \quad (306.)$$

obtemos, neste caso:

$$\mu t^q = \eta \left[ \int_0^1 \frac{(1-\theta)^{pq}}{\sqrt{\theta}} d\theta \right] \mu^p t^{\frac{1}{2} + pq} \quad (307.)$$

Logo:

$$q = \frac{1}{2(1-p)} \quad (308.)$$

e:

$$\mu = \eta^{\frac{1}{1-p}} \left[ \int_0^1 \frac{(1-\theta)^{\frac{p}{2(1-p)}}}{\sqrt{\theta}} d\theta \right]^{\frac{1}{1-p}} ; \text{ para } p \neq 1 \quad (309.)$$

(para o caso  $p = 1$ , ou seja, para uma condição fronteira da tipo convecção, a solução é conhecida [34]).

## Nomenclatura

### Propriedades do material

$\rho$ : massa específica,  $\text{kg m}^{-3}$ .

$\rho_e$ : resistividade eléctrica,  $\Omega \text{ m}$ .

$c_p$ : calor específico a pressão constante,  $\text{J m}^{-1} \text{ K}^{-1}$ .

$D$ : difusividade térmica,  $\text{m}^2 \text{ s}^{-1}$ .

$D^*$ : difusividade térmica generalizada (equação (292.)),  $\text{m}^2$ .

$h$ : coeficiente de transferência de calor da superfície,  $\text{m}^{-1}$ .

$K$ : condutividade térmica,  $\text{W m}^{-1} \text{ K}^{-1}$ .

$l$ : espessura do material,  $\text{m}$ .

$L$ : calor latente por unidade de volume,  $\text{J m}^{-3}$ .

$P$ : ver equação (51.),  $\Omega \text{ m}$ .

$Q$ : ver equação (51.),  $^{\circ}\text{C}^{-1}$ .

### Propriedades do feixe laser

$\lambda$ : comprimento de onda,  $\text{m}$ .

$G_i$ : potência generalizada (ver equação (122.)).

$I$ : densidade de potência,  $\text{W m}^{-2}$ .

$I_{max}$ : densidade de potência no eixo (feixe gaussiano),  $\text{W m}^{-2}$ .

$P$ : potência,  $\text{W}$ .

$P_{\theta \rightarrow r}$ : potência (ver equação (90.)),  $\text{W}$ .

$r_0$ : raio (feixe uniforme); ou: raio a  $1/e$  (feixe gaussiano),  $\text{m}$ .

$r'_0$ : raio a  $1/e^2$  (feixe gaussiano),  $\text{m}$ .

$t_i$ : duração do impulso,  $\text{s}$ .

$v$ : velocidade de varrimento,  $\text{m s}^{-1}$ .

### Propriedades da interacção

$\beta$ : coeficiente de absorção linear,  $\text{m}^{-1}$ .

$\delta$ : espessura de absorção,  $\text{m}$ .

$A$ : coeficiente de absorção.

$R$ : reflectividade (ou coeficiente de reflexão).

### Outras grandezas

$\alpha$ : ver equação (21.),  $\text{K}^{-1/2}$ .

$\alpha_n$ : raízes positivas da equação (154.).

$\beta$ : ver equação (93.),  $\text{W K}^{-1}$ .

$\chi$ : ver equação (21.),  $\text{K}$ .

$\gamma$ : ver equação (229.),  $\text{m}^{-1}$ .

$\Delta, R$ : ver equações (85.a-b).

$\delta$ : ver equação (113.).

$\epsilon$ : ver equação (302.),  $\text{W m}^{-2} \text{K}^{-\text{p}}$ .

$\epsilon_1, \epsilon_2$ : ver equação (95.).

$\eta$ : ver equação (304.),  $\text{K}^{1-\text{p}} \text{s}^{-1/2}$ .

$\varphi_0$ : variável adimensional de temperatura da superfície (ver equação (46.)).

$\lambda$ : ver equação (152.).

$\mu$ : ver equação (29.),  $\text{K s}^{-\text{q}}$ .

$\psi$ : ver equação (299.).

- $\Psi$** : temperatura adimensionalizada (fonte gaussiana contínua, equação (236.)).
- $\rho$** : variável adimensional de velocidade (fonte gaussiana móvel, equação (287.)).
- $\sigma$** : ver equação (237.).
- $\theta$** : temperatura inicial, **K**.
- $\Theta_i$** : temperatura adimensionalizada (fonte gaussiana instantânea, equação (187.)).
- $\Theta_c$** : temperatura adimensionalizada (fonte gaussiana contínua, equação (216.)).
- $\Delta\theta$** : temperatura de pré-aquecimento, tomando como nula a temperatura ambiente, **K**.
- $v$** : variável adimensional de tempo (fonte gaussiana instantânea, equação (188.)).
- $\tau$** : variável adimensional de tempo (ver equação (45.)).
- $\tau_1, \tau_2$** : temperatura (ver equação (90.)), **K**.
- $\tau$** : ver equação (153.).
- $\xi$** : ver equação (239.).
- $\zeta$** : variável adimensional de profundidade (fonte gaussiana instantânea, equação (190.)).
- $\omega$** : variável adimensional de distância à origem (fonte gaussiana instantânea, equação (189.)).
- $A_f$** : área da projecção no plano XOY da superfície correspondente à interface sólido-líquido, **m<sup>2</sup>**.
- $a$** : ver equação (82.), **m<sup>2</sup>**.
- $b$** : ver equação (82.), **m**.
- $c$** : ver equação (82.).
- $E$** : ver equação (19.), **K s<sup>-1/2</sup>**.
- $f$** : fluxo de calor à superfície, **W m<sup>-2</sup>**.
- $F$** : termo fonte genérico (ver equação (54.)), **J m<sup>-3</sup> s<sup>-1</sup>**.
- $h$** : temperatura de pré-aquecimento generalizada (ver equação (120.)).

$p$ : ver equação (302.).

$p$ : função associada ao perfil temporal da fonte (ver equação (215.)).

$q$ : ver equação (29.).

$q_0$ : quantidade de calor libertada (fonte pontual), **J**.

$q_0'$ : potência libertada (fonte contínua), **W**.

$q_2$ : quantidade de calor libertada por unidade de área (fonte plana), **J m<sup>-2</sup>**.

$q_2'$ : potência libertada por unidade de área (fonte contínua), **W m<sup>-2</sup>**.

$q_c$ : quantidade de calor libertada por unidade de área (fonte circular), **J m<sup>-2</sup>**.

$q_c'$ : potência libertada por unidade de área (fonte contínua), **W m<sup>-2</sup>**.

$q_g$ : quantidade de calor libertada por unidade de área, na origem (fonte gaussiana), **J m<sup>-2</sup>**.

$q_g'$ : potência libertada por unidade de área, na origem (fonte gaussiana), **W m<sup>-2</sup>**.

$Q_g'$ : valor máximo de  $q_g'$ , **W m<sup>-2</sup>**.

$Q$ : ver equação (69.), **K s**.

$R, \Delta$ : ver equações (85.a-b).

$r$ : distância à origem do sistema de coordenadas, **m**.

$R$ : distância à origem do sistema de coordenadas (ver equação (246.)), **m**.

$s$ : distância ao eixo  $OZ$  (ver equação (265.)), **m**.

$t^*$ : tempo característico (ver equação (38.)), **s**.

$t$ : tempo, **s**.

$T$ : temperatura, **K**.

$T_f$ : temperatura de fusão, **K**.

$T_{fus}$ : temperatura de fusão, **°C**.

$T_{1D}$ : temperatura (solução fundamental, modelo unidimensional simples), **K**.

$T_{in}$ : temperatura inicial, **K**.

$T_o$ : temperatura da superfície, **K**.

$T^+$ : ver equação (36.).

$t_0$ : ver equação (60.), s.

$t_y$ : instante em que se atinge um máximo de temperatura no eixo dos YY, s.

$t_z$ : instante em que se atinge um máximo de temperatura no eixo dos ZZ, s.

$u$ : variável adimensional de tempo (fonte gaussiana móvel, equação (286.)).

$V_f$ : volume fundido por unidade de tempo,  $\text{m}^3 \text{s}^{-1}$ .

$W$ : área da zona fundida no plano YOZ (equação (77.)),  $\text{m}^2$ .

$X, Y, Z$ : coordenadas cartesianas adimensionalizadas (fonte gaussiana móvel, equações (288.), (289.) e (290.)).

$x, y, z$ : coordenadas cartesianas,  $\text{m}$  (usualmente tais coordenadas são escolhidas de forma a que  $\text{OX}$  é o eixo de progressão do feixe laser,  $\text{XOY}$  é a superfície e  $\text{OZ}$  aponta para o interior do material).

$Y$ : isotérmica correspondente à interface sólido-líquido,  $\text{m}$ .

$y_m$ : metade do comprimento da zona fundida,  $\text{m}$ .

$z^*$ : profundidade fundida,  $\text{m}$ .

$z_m$ : profundidade fundida,  $\text{m}$ .

$z_0$ : coordenada de posição da fonte linear móvel de comprimento finito,  $\text{m}$ .

## Bibliografia

1. "*Laser Material Processing*", W. M. Steen, capítulos 1, 3, 4, 6 e 7, Springer Verlag, Londres, 1991.
2. "*Laser Materials Processing*", ed. M. Bass, North-Holland, Amsterdão, 1983.
3. "*Effects of high-power laser radiation*", J. F. Ready, p. 72-87, Academic Press, New York, 1971.
4. "*Conduction of Heat in Solids*", 2<sup>nd</sup> ed., H. S. Carslaw e J. C. Jaeger, Oxford University Press, Oxford, 1959.
5. *ibidem*, p. 75.
6. *ibidem*, p. 76
7. A. M. Deus, R. Vilar, *a ser submetido*.
8. "*Infrared Radiation*", M. Bramson, p. 127, Plenum Press, New York, 1968.
9. "*Analytical and Numerical Methods for Volterra Equations*", P. Linz, p. 71-75, Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, 1985.
10. "*Introduction to Heat Transfer*", Frank Incropera, David DeWitt, p. 669, 670, John Wiley & Sons, New York, 1986.
11. "*Principles of Materials Science and Engineering*", 2<sup>nd</sup> ed., William Smith, p. 192, McGraw-Hill, Singapore, 1990.
12. *Ref. 3*, p. 266.
13. "*The Theory of Moving Sources of Heat and Its Application to Metal Treatments*", D. Rosenthal, Transactions ASME **68** (1946) 849-66.
14. "*Heat Treating and Melting Material with a Scanning Laser or Electron Beam*", H. E. Cline, T. R. Anthony, J. Appl. Phys. **48** (9) (1977) 3895-900.
15. "*The Transformation Hardening of Steel Surfaces by Laser Beams - I. Hypo-Eutectoid Steels*", M. F. Ashby, K. E. Easterling, Acta Metall. **32** (11)(1984) 1935-48.
16. A. M. Deus, R. Vilar, *a ser submetido*.

17. "Table of integrals, series, and products", Corrected and Enlarged Edition, I. S. Gradshteyn, I. M. Ryzhik, p. 81, 82, Academic Press, Orlando, Florida, U.S.A., 1983.

18. "Laser heating of solids", M. Bass, in "Physical processes in laser-materials interactions", ed. M. Bertolotti, NATO/ASI Series, Series B: Physics, vol. 84, p. 80, 81, 84, 89-91, 94, 110-113, Plenum Press, New York, 1983.

19. "A Relation Between Laser Power and Initial Temperature in Laser Surface Treatments of Metals", A. M. Deus, R. Vilar, O. Conde, J. S. Figueira, in Surface Modification Technologies V, Proc. of the 5<sup>th</sup> Int. Conf. on Surface Modification Technologies, Birmingham, U.K, 2-4 September 1991, p. 475-489, The Institute of Materials, London, 1992.

20. "Thermophysical properties of matter", Y. S. Touloukian *et al.*, vol. 1 (1970), p. 169, 237; vol. 4 (1970), p. 105, 106, 146; vol. 10 (1973), p. 82, 120; IFI/Plenum, New York.

21. "Optical properties of the metals Al, Co, Cu, Au, Fe, Pb, Ni, Pd, Pt, Ag, Ti, and W in the infrared and far infrared", M. A. Ordal *et al.*, Appl. Optics 22 (7) (1983) 1099-1119.

22. Ref. 3, p. 112.

23. Ref. 3, p. 125.

24. Ref. 3, p. 80.

25. Ref. 3, p. 256.

26. Ref. 3, p. 259.

27. Ref. 3, p. 260.

28. Ref. 3, p. 261.

29. Ref. 3, p. 262.

30. Ref. 3, p. 484.

31. Ref. 3, p. 263.

32. Ref. 3, p. 258.

33. Ref. 3, p. 268.

34. Ref. 3, p. 70.